

# 1. Podstawy rachunku operatorowego. Definicje i sposoby liczenia: rotacji, dywergencji, gradientu, laplasjanu skalarnego i wektorowego. Wymienić najważniejsze tożsamości rachunku operatorowego.

**Rotacja**- operacja różniczkowa, która w danym polu wektorowym przyporządkuje nowe pole wektorowe. Służy do sprawdzania czy w danym polu wektorowym występują wiry pola.

$$rot \vec{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} d\vec{l}}{\Delta S}$$

$$rot \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

**Dywergencja**- operacje matematyczne na zadanym polu wektorowym, które przypisują temu polu pewne pole skalare. Służy do sprawdzenia, czy w danym fragmencie przestrzeni znajduje się źródło pola.

$$div \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} d\vec{l}}{\Delta V}$$

$$div \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

**Gradient pola**- pewnemu polu skalarnemu przyporządkowuje pole wektorowe.

$$grad \varphi(x, y, z) = \vec{\nabla} \varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

**Laplasjan skalarny**- operacja różniczkowa II rzędu, która danemu polu skalarnemu przyporządkowuje nowe pole skalare.

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \vec{k} \quad (\text{def.})$$

**Laplasjan wektorowy**- operacja różniczkowa II rzędu, która danemu polu skalarnemu przyporządkowuje nowe pole wektorowe.

$$\Delta \vec{E}_{(x,y,z)} = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \vec{k}$$

**Podstawowe tożsamości:**

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{A}) & (\text{rotacja rotacji}) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &\equiv 0 & (\text{dywergencja rotacji}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot f - \nabla^2 f &= \Delta f & (\text{dywergencja gradientu}) \\ \nabla^2 \times (\vec{\nabla} f) &= 0 & (\text{rotacja gradientu}) \end{aligned}$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V div \vec{E} dV \quad (\text{Ostrogradskiego-Gaussa})$$

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = \int_S rot \vec{E} d\vec{S} \quad (\text{Stokes'a})$$


---

## 2. Pole elektrostatyczne. Prawo Coulomba. Definicja natężenia pola elektrycznego. Potencjał- sposoby liczenia. Napięcie i związek z potencjałem. Prawo Gaussa, równanie Poissona i Laplace'a. Potencjał, a natężenie pola.

**Pole elektrostatyczne**- to przestrzeń wokół nieruchomych ładunków lub ciał naelektryzowanych, w której na ładunki elektryczne działają siły. ( praca:  $\rho = F \cdot L$  )

**Prawo Coulomba** (1785):

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \quad [\text{N}]$$

$\vec{r}$  - wektor wodzący

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left[ \frac{\text{F}}{\text{m}} \right]$$

$q_1$  i  $q_2$  - ładunki elektryczne

**Natężenie pola elektromagnetycznego:**

$$E_{(x,y,z)} = \frac{\vec{F}_{q_0}(x_0, y_0, z_0)}{q_0} \quad \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

$q_0 \rightarrow 0$  ładunek próbny

$q_0 > 0$  ładunek dodatni

**Potencjał**- miara pracy, potrzebna do przesunięcia ładunku  $q_0$  od punktu  $P_0$  do P.

$$\Phi_p = - \int_{\infty}^P \vec{E} d\vec{l}$$

$$\Phi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

r- odległość od ładunku q do P

Sposoby liczenia:

$$\begin{aligned} \text{a) } \Phi_p &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} \\ \text{b) } \Phi_p &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\tau}{r} dl \\ \text{c) } \Phi_p &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\xi}{r} dS \\ \text{d) } \Phi_p &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_V dV}{r} \end{aligned}$$

**Napięcie elektryczne:**

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \quad [\text{V}]$$

$$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2$$

(wartość napięcia nie zależy od drogi całkowania)

**Prawo Gaussa:**

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

Równanie Poissona:

$$a) \Delta \Phi = \frac{\rho_V}{\epsilon_0}$$

$$b) \text{postać różniczkowa: } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon_0}$$

c) Rozwiązanie równania Poissona:

$$\Phi_{(x,y,z)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_V}{r} dV + e$$

Równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

$$\Delta \Phi = 0$$

Potencjał, a natężenie pola elektrycznego:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$$

$$d\Phi = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

**3. Dielektryki. Dipol elektryczny, definicja wektora polaryzacji, wektor indukcji elektrycznej, wartość i jednostka  $\epsilon_0$ , wartość  $\epsilon_w$  dla różnych materiałów.**

**Dielektryk**- materiał w którym występuje niska koncentracja ładunków swobodnych, w wyniku czego bardzo słabo jest przewodzony prąd.

Dielektryk idealny nie przewodzi prądu elektrycznego i ma strukturę składającą się z dipoli elektrycznych.

**Dipolem elektrycznym** nazywamy układ dwóch ładunków  $+q$  i  $-q$  mechanicznie ze sobą związanych.

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l} \quad [\text{C} \cdot \text{m}] \quad (\text{moment elektryczny dipola})$$

**Wektor polaryzacji:** 
$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$$

**Wektor indukcji elektrycznej** ( jego wartość zależy od ładunków swobodnych)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_w \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left[ \frac{\text{F}}{\text{m}} \right]$$

$$\text{próżnia} \Rightarrow 1,0000$$

$$\epsilon \text{ powietrze} \Rightarrow 1,000532$$

$$\text{woda} \Rightarrow 78,3$$

Prawo Gaussa (dla dielektryka):

$$Q_z = - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$Q_z$ - ładunek związany

**4. Pojemność elektryczna. Sposoby liczenia. Pojemności podstawowych układów. Energia w kondensatorze.**

**Pojemność elektryczna**- to cecha geometryczna układu, która wyraża zdolność do gromadzenia ładunków elektrycznych. Zależy tylko od wymiarów geometrycznych i parametrów dielektryka w układzie.

$$C = \frac{Q}{U} [F]$$

Sposób liczenia:

- a) z definicji:  $U = - \int \vec{E} d\vec{l}$   $\vec{E}$  - z prawa Gaussa  
 b) metodą zmiennych rozłożonych:  
 (dzielimy cały układ na połączone ze sobą elementarne kondensatory)

- połączenie szeregowo:

$$\frac{1}{C_w} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

$$\frac{1}{\epsilon_w} = \int dC$$

- połączenie równoległe:

$$C_w = \sum_{i=1}^n C_i$$

$$C_w = \int dC$$

Pojemność podstawowych kondensatorów:

- a) płaski:  $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_w S}{d}$   
 b) walcowy  $C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_w l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$   
 c) sferyczny  $C = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_w \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$

Energia zgromadzona w kondensatorze jest elementarną pracą  $dW$  potrzebną do przemieszczenia elementarnego ładunku  $dq$  z jednej okładki na drugą. Energia ta jest równa energii pola elektrycznego wytworzonego w kondensatorze.

$$dW = U \cdot dq = \frac{q}{C} dq$$

$$\epsilon = \int_0^Q dW = \int_0^Q \frac{Q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2$$

Gęstość energii:

$$W_c = \frac{\epsilon_{pot}}{V_{diel}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_w E^2$$

## 5. Prąd elektryczny (definicja). Typy prądów. Równanie ciągłości, lokalne i obwodowe prawo Ohma. I i II prawo Kirchhoffa.

Prąd elektryczny- uporządkowany ruch ładunków elektrycznych. Za kierunek prądu umownie przyjęto kierunek od niższego do wyższego potencjału.

Typy prądów:

- a) liniowy:  $I = \frac{dQ}{dt} [A]$   
 b) powierzchniowy:  $\vec{I}_s = \sigma_y \cdot \vec{V} \left[ \frac{A}{m} \right]$   
 c) objętościowy:  $I = \int_S \vec{I} d\vec{S} [A]$

### Równanie ciągłości:

- postać całkowa:  $\oint_S \vec{I} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}$
- postać różniczkowa:  $\text{div} \vec{I} = -\frac{d\rho_v}{dt}$   
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{I} = -\frac{d\rho_v}{dt}$

### Lokalne prawo Ohma:

- a)  $\vec{I} = \sigma \vec{E}$
- b)  $\vec{E} = \rho \cdot \vec{I}$

$\sigma$  - przenikalność właściwa materiału;  $\rho$  - oporność materiału;

### Obwodowe prawo Ohma: $\frac{U}{I} = \rho \frac{L}{S} = R$

### I prawo Kirchhoffa: $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$

(Całka po powierzchni zamkniętej z gęstości prądu równa jest 0)

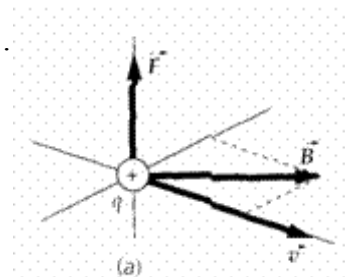
### II prawo Kirchhoffa: $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

(Napięcie obliczone po biegunowej zamkniętej jest równe 0)

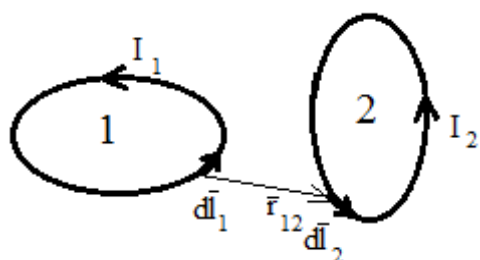
## 6. Pole magnetostatyczne. Prawo Grassmanna, Biota- Savarta i prawo przepływu Ampera, prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya, reguła Lenza- rysunki i wzory.

Pole magnetostatyczne jest określone wektorem indukcji magnetycznej.

$$\vec{B} = \frac{d\vec{F}_{12}}{dt} [T]$$



### Prawo Grassmanna:

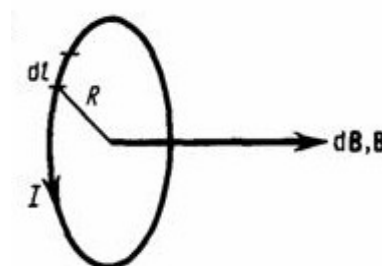


$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{(d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}) \times d\vec{l}_2}{|\vec{r}_{12}|^3} [N]$$

Siła z jaką jeden przewód z prądem oddziałuje na drugi

### Prawo Biota – Savarta:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} [Wb]$$

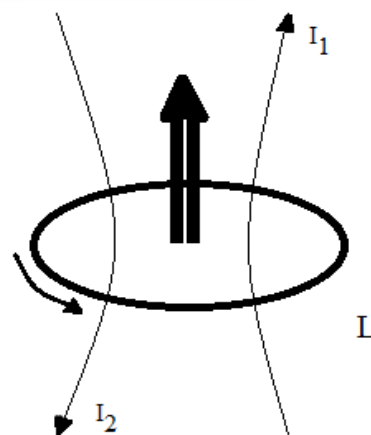


Określa wartość indukcji magnetycznej w punkcie odległym od r od elementu z prądem I.

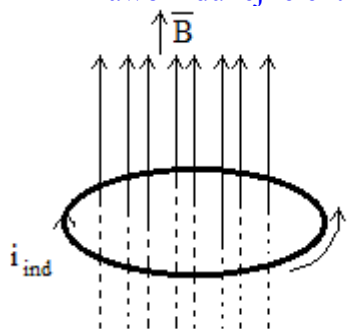
### Prawo przepływu Ampera:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N I_i$$

Cyrkulacja natężenia pola magnetycznego po dowolnej krzywej zamkniętej jest równe algebraicznej sumie prądów obejmowanych przez kontur I.



Prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya:



$$\frac{d\Psi_B}{dt} > 0$$

$$\Psi_B > 0$$

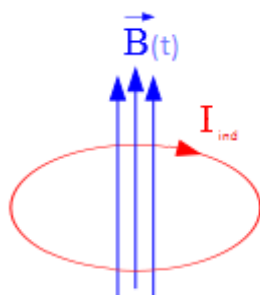
$$\varepsilon_{ind} < 0$$

Cyrkulacja pola elektrycznego po zamkniętej krzywej jest równa zmianie indukcji magnetycznej obejmowanego przez kontur magnetyczny.

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi_B}{dt}$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Psi_B}{dt}$$

Reguła Lenza:



$$I \cdot R = -\frac{\partial \Psi_\mu}{\partial t}$$

## 7. Moment magnetyczny, wektor namagnesowania, pole magnetyczne w ośrodkach materialnych: krzywa histerezy. Indukcyjność własna i wzajemna. Energia pola magnetycznego.

**Moment magnetyczny** jest własnością danego ciała opisującą pole magnetyczne wytwarzane przez to ciało, a tym samym i jego oddziaływaniem z polem magnetycznym.

$$\vec{m} = \vec{I} \cdot \vec{s} \quad [\Delta \cdot m^2]$$

**Wektor namagnesowania:**

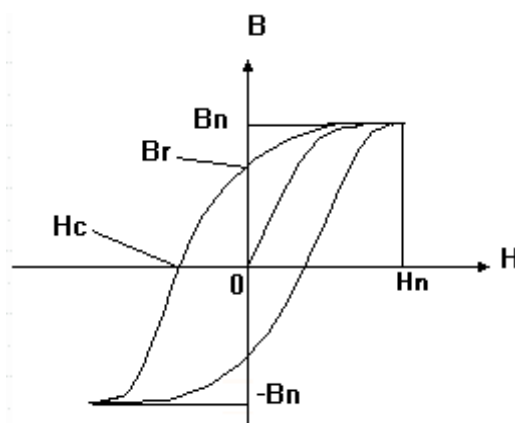
$$\vec{M} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V}$$

Wyraża gęstość wypadkowego momentu magnetycznego.

**Pole magnetyczne w ośrodkach materialnych:**

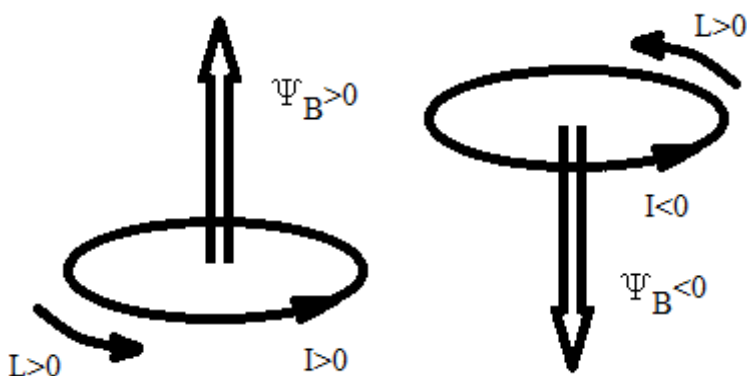
$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_w) \vec{H} = \mu_0 \mu_w \vec{H}$$

$$\mu_w = f(H)$$



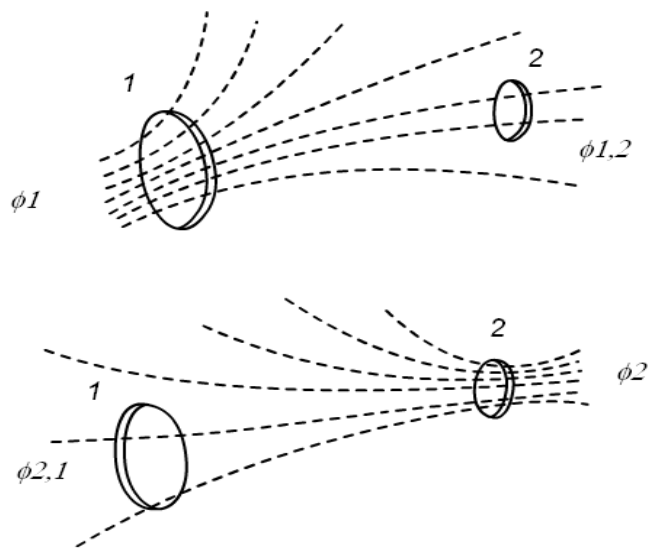
**Indukcja własna:**

$$L_m = \frac{\Psi_{mm}}{I_m}$$



Indukcja wzajemna:

$$M_{ki} = \frac{\Psi_{Bki}}{I_i}, \quad M_{ki} = M_{ik} \quad [H]$$



Energia pola magnetycznego:

$$\varepsilon_m = \int_V \omega_m(x, y, z) dV = \int_V \left( \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) dV$$

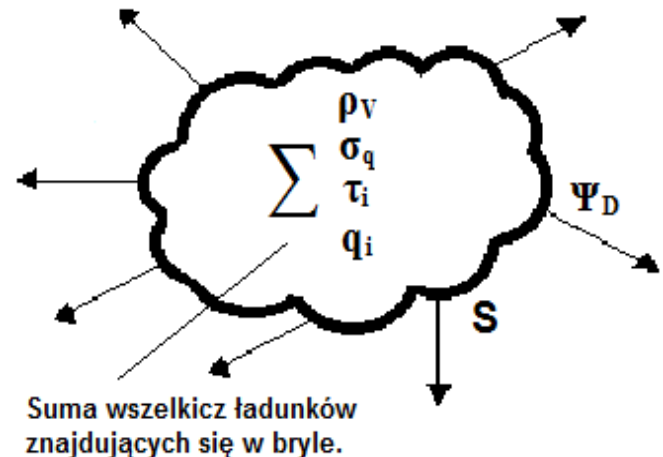
Całkowita energia w objętości V.

**8. Równania Maxwella. Postać całkowa (wzór, treść i rysunek), postać różniczkowa i zespolona. Podać pełne wyrażenie na  $\varepsilon_{sk}$ .**

Prawo Gaussa:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = Q_s, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v, \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad D_{N2} - D_{N1} = \sigma_q$$

Strumień wektora indukcji elektrycznej przez dowolną zamkniętą powierzchnię jest równy algebraicznej sumie ładunków swobodnych zgromadzonych wewnątrz bryły ograniczonej powierzchnią S.

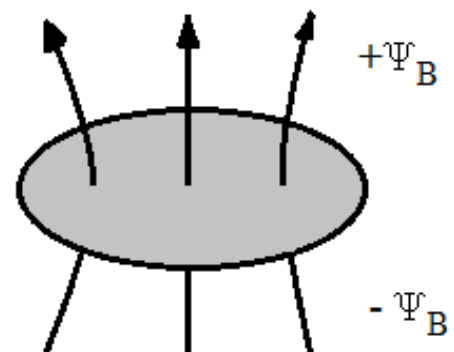


Prawo Gaussa (dla pola magnetycznego):

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad B_{N2} - B_{N1} = 0$$

Strumień wektora indukcji magnetycznej przez dowolną zamkniętą powierzchnię S zawsze jest równy 0.

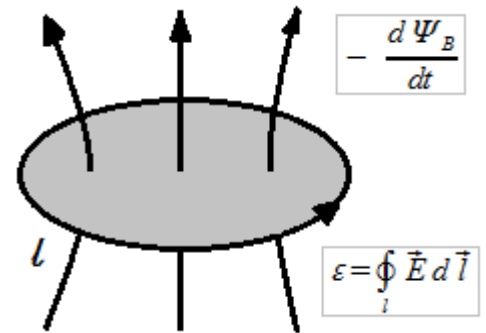
$$\sum \Psi_B = 0$$



Prawo Faraday'a:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Psi_B}{dt}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}, \quad E_{t2} - E_{t1} = 0$$

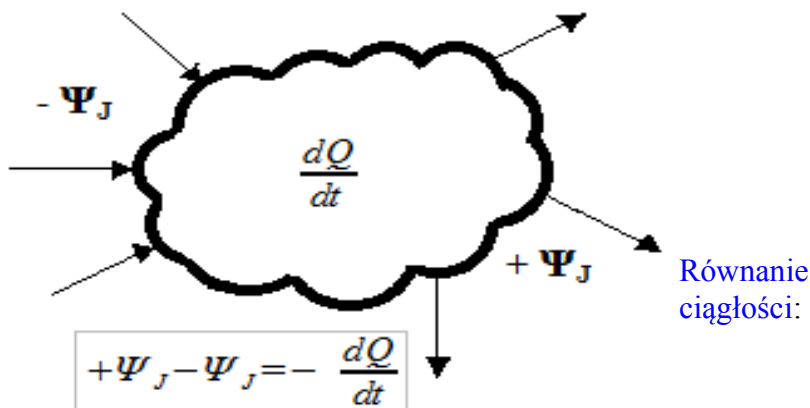
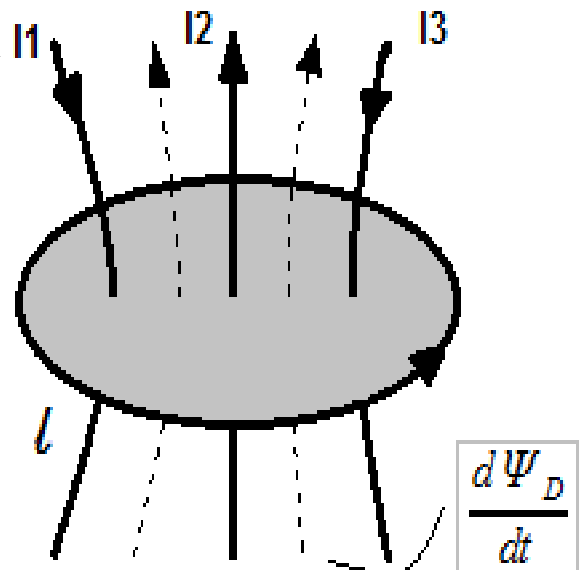
Cyrkulacja pola elektrycznego po dowolnej krzywej zamkniętej l, jest równa zmianie strumienia indukcji magnetycznej przenikającej przez dowolną powierzchnię rozpiętą na konturze l.



Prawo Ampera:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = J + \frac{d\Psi_D}{dt}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}, \quad \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_{sk}\vec{E}, \quad H_{t2} - H_{t1} = J_{st}$$

Cyrkulacja wektora H po dowolnej krzywej zamkniętej l jest równa algebraicznej sumie prądów obejmujących konturem l i zmiana strumienia indukcji elektrycznej przenikającego przez dowolną powierzchnię rozpiętą na konturze l.



Równanie ciągłości:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{J} = \frac{d\rho_V}{dt}, \quad J_{N2} - J_{N1} = -\frac{d\sigma_y}{dt}$$

Strumień gęstości prądu przez dowolną zamkniętą powierzchnię S jest równy zmianie ładunku zawartego w bryle ograniczonej powierzchnią S.

$$\epsilon_{sk} = \frac{\sigma}{j\omega} + \epsilon = \frac{\sigma}{j\omega} + \epsilon_0\epsilon_w$$

9. Warunki brzegowe wektorów pola elektrycznego, magnetycznego i  $J_n$ . Wyprowadzić warunki  $D_n$  i  $E_t$ .

- 1)  $D_{N2} - D_{N1} = \sigma_q$  (prawo Gaussa)
- 2)  $E_{t2} - E_{t1} = 0$  (prawo Faraday'a)
- 3)  $H_{t2} - H_{t1} = I_{st}$  (prawo Ampera)
- 4)  $J_{N2} - J_{N1} = -\frac{d\sigma_y}{dt}$  (prawo ciągłości)



Warunki na  $D_n$ :

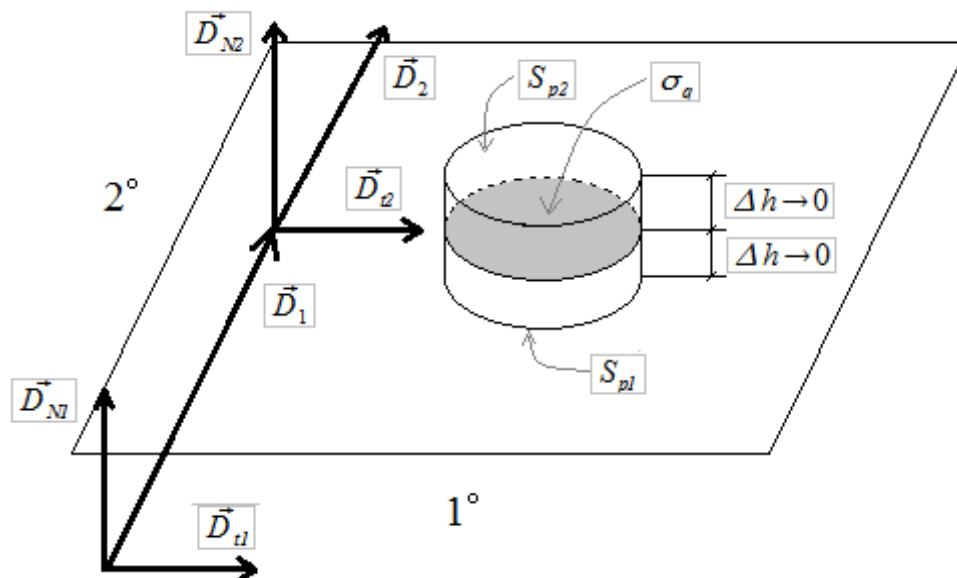
$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q_S$$

$$\oint_{\Delta S_b} \vec{D} d\vec{S} = 0, \text{ więc}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = Q_S$$

$$-D_{N1} \cdot \Delta S + D_{N2} \Delta S = Q_S$$

$$D_{N2} - D_{N1} = \frac{Q_S}{\Delta S} = \sigma_q$$



Warunki na  $E_t$ :

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \Delta h \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E} d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E} d\vec{l} + \int_4^5 \vec{E} d\vec{l} &= \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_N d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{t1} d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E}_N d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E}_{t2} d\vec{l} = 0 \\ &= \int_1^2 \vec{E}_{t1} d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E}_{t2} d\vec{l} \Rightarrow E_{t2} \Delta l - E_{t1} \Delta l = 0 \Rightarrow E_{t2} - E_{t1} = 0 \end{aligned}$$

## 10. Równanie falowe (wyprowadzić), jednorodna fala płaska- zapis i struktura (rysunek).

Założenia:

- 1) przestrzeń jest nieograniczona,
- 2) ośrodek jest jednorodny ( $\epsilon, \mu, \sigma = \text{const}$ ),
- 3) brak ładunków oraz prądów wywołanych ruchem tych ładunków.

Z równań Maxwella:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -j\mu\omega\vec{H} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= j\omega\epsilon_{sk}\vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{E}}{-j\mu\omega} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\mu\omega \cdot j\omega\epsilon_{sk}\vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} - \mu\omega^2\epsilon_{sk}\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \Delta \vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} + \epsilon_{sk} \mu \omega^2 \vec{E} = 0 \\ \Delta \vec{H} + \epsilon_{sk} \mu \omega^2 \vec{H} = 0 \end{cases} \quad \gamma^2 = -\epsilon_{sk} \mu \omega^2$$

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0 \\ \Delta \vec{H} - \gamma^2 \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (\text{Równanie falowe Helmholtz})$$

Jednorodna fala płaska:

$\vec{\gamma}$  - wektor propagacji,

$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + j\vec{\beta}$  ( $\alpha$  – współczynnik tłumienia,  $\beta$  – współczynnik fazy)

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{-\vec{\gamma} \cdot \vec{r}} e^{-j\omega t}$$

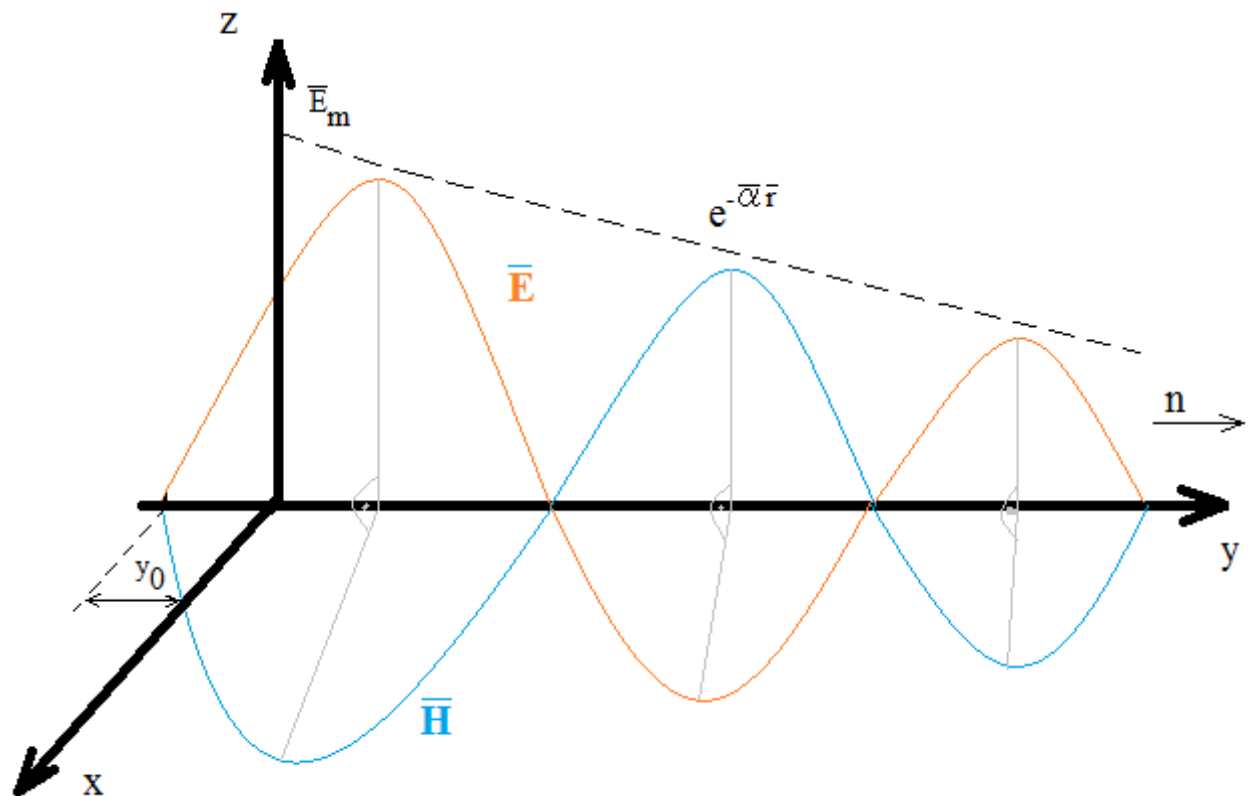
$$\vec{H} = \vec{H}_m e^{-\vec{\gamma} \cdot \vec{r}} e^{-j\omega t}$$

$\alpha = \vec{u}_\alpha \cdot \alpha$  ,  $\vec{u}_\alpha = \vec{u}_\beta = \vec{u}$  - kierunek propagacji

$\beta = \vec{u}_\beta \cdot \beta$  ,  $\vec{\gamma} = \gamma \cdot \vec{u}$

$$\vec{E} = E_m e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{r}} e^{-j\vec{\beta} \cdot \vec{r}} \quad , \quad [\alpha] = [\beta] = \left[ \frac{1}{m} \right]$$

$$\vec{n} = \vec{i}_y$$



$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_{mz} e^{-\alpha r} \cos(\omega t - \beta r) \vec{i}_z \\ \vec{H} &= H_{ux} e^{-\alpha r} \cos(\omega t - \beta r) \vec{i}_x \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\gamma} \cdot \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \vec{\gamma} \perp \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\gamma} \cdot \vec{H} = 0 \Leftrightarrow \vec{\gamma} \perp \vec{H}$$

$$\begin{cases} \vec{E} \perp \vec{n} \\ \vec{H} \perp \vec{n} \end{cases} \quad \text{Fala poprzeczna}$$

## 12. Propagacja fali płaskiej w różnych ośrodkach (dielektryk bezstratny, dielektryk stratny, przewodnik). Jak ośrodek wpływa na parametry fali.

Propagacja fali w różnych ośrodkach:

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_w \mu_w} \sqrt{0,5(\sqrt{1+a^2}-1)}$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_w \mu_w} \sqrt{0,5(\sqrt{1+a^2}+1)}$$

$$a = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_w}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}, \quad v_f = \frac{\omega}{\beta}, \quad \delta = \frac{1}{\alpha}$$

$\lambda$  – długość fali;  $v_f$  – prędkość falowa;  $\delta$  – głębokość wnikania;

próżnia:

$$v_f = c, \quad \lambda_0 = \frac{c}{f}, \quad \delta = \infty, \quad Z_{f0} = 120\pi, \quad \varphi_0 = 0$$

dielektryk bezstratny:

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_w}}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_w}}, \quad \delta = \frac{1}{\alpha}, \quad Z_f < Z_{f\text{beastr}}, \quad \varphi_0 \neq 0, \quad Z_f \in \mathbb{C}$$

dielektryk stratny:

$$v_f < u_{fstr.}, \quad \lambda < \lambda_{str.}, \quad \delta = \frac{1}{\alpha}, \quad Z_f < Z_{fstr.}, \quad \varphi_0 \neq 0, \quad Z_f \in \mathbb{C}$$

przewodnik rzeczywisty:

$$a = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_w} \gg 1, \quad \alpha \approx \beta$$

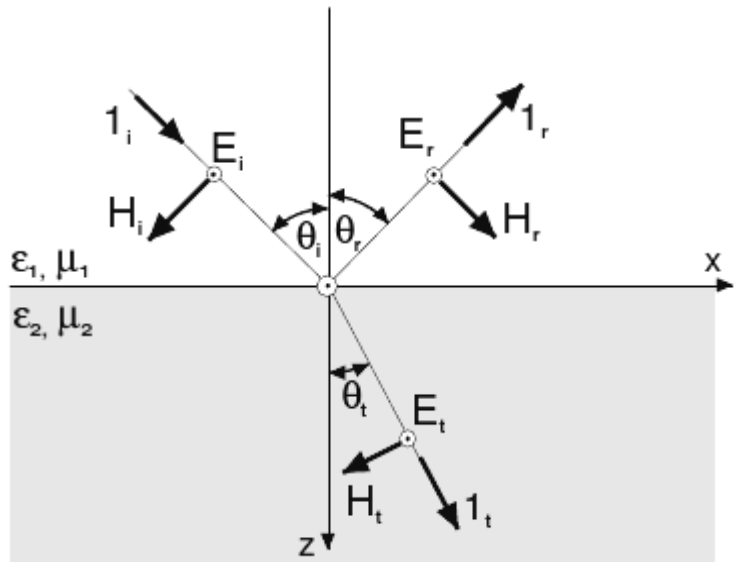
$$\alpha = \beta = \sqrt{0,5 \omega \mu \sigma}, \quad \delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{0,5 \omega \mu \sigma}} \quad (\text{dla } C_n)$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}, \quad \lambda = \frac{v_f}{f}, \quad \lambda \ll \lambda_0$$

## 13. Odbicie i załamanie fali płaskiej na granicy dwóch ośrodków. Wzory Fresnella. Współczynniki energetyczne. Kąt Brewstera. Całkowite wewnętrzne odbicie.

Założenia:

- 1) fala monochromatyczna i jednorodna;
- 2) granica jest nieruchoma;
- 3) fala pada od strony dielektryka bezstratnego;
- 4) oba ośrodki są liniowe, jednorodne i izotropowe.



$$E_{t2} = E_{t1}, \quad D_{N2} - D_{N1} = \sigma_q$$

$$W_t = P_t + R_t, \quad \epsilon_{w2} E_{N2} = \epsilon_{w1} E_{N1}$$

$$P_t \exp(j\omega_p t - \gamma_{px} x - \gamma_{py} y) + R_t \exp(j\omega_w t - \gamma_{wx} x - \gamma_{wy} y) = W_t \exp(j\omega_w t - \gamma_{wx} x - \gamma_{wy} y)$$

Wzory Fresnella:

$$\rho_{E\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{p\parallel}} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\rho_{E\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{p\perp}} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$H_{E\parallel} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$H_{E \perp} = \frac{2 \cos \Theta_1 \sin \Theta_2}{\sin(\Theta_1 + \Theta_2)}$$

Współczynniki energetyczne:

$$R \equiv |\rho_E|^2, \quad T \equiv 1 - R, \quad R \equiv \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2$$

Kąt Brewstera:

$$\tan \Theta_{\text{Br}} = n_{12}$$

100% fali spolaryzowanej wnika do ośrodka drugiego.

**Całkowite wewnętrzne odbicie**, to zjawisko polegające na tym, że światło padające na granicę od strony ośrodka o wyższym współczynniku załamania, pod kątem większym niż kąt graniczny, nie przechodzi do drugiego ośrodka, lecz ulega całkowitemu odbiciu (pryzmaty, światłowody).

#### 14. Potencjały elektrodynamiczne. Potencjał opóźniony skalarny i wektorowy. Wektor Hertza.

Potencjał elektrodynamiczny:

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi, \quad \nabla^2 \Phi = \frac{-\rho_v}{\epsilon_0}$$

Potencjały opóźnione (skalarny i wektorowy):

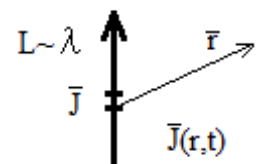
$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{d\vec{A}}{dt}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(x_0, y_0, z_0, t - \frac{r}{v})}{r} dV \\ A(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(x_0, y_0, z_0, t - \frac{r}{v})}{r} dV \end{array} \right.$$

Wektor Hertza:

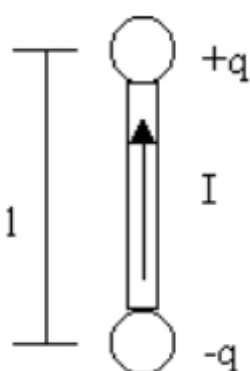
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \text{rot rot } \vec{\Pi}_e \\ \vec{H} = j\omega\epsilon \text{rot } \vec{\Pi}_e \end{array} \right.$$

Zastosowanie elektrycznego wektora Hertza  $\vec{\Pi}_e$  pozwala na wyrażenie potencjałów  $\Phi$  i  $\vec{A}$  w funkcji tego wektora oraz natężeń pól  $\vec{E}$  i  $\vec{H}$ .



#### 15. Dipol elementarny. Charakterystyki promieniowania w polu dalekim i bliskim. Opór promieniowania.

Źródło elementarne:



- a) rozpatrujemy pola w odległościach  $\gg$  od rozmiarów źródła, tzn.  $l \ll r$   
b) wymiary źródła są  $\ll \lambda$  (nie ma przesunięć fazowych w obrębie źródła)  
Źródło elementarne można więc uważać za punktowe źródło pola.

**Elementarny oscylator** (wibrator lub dipol) –

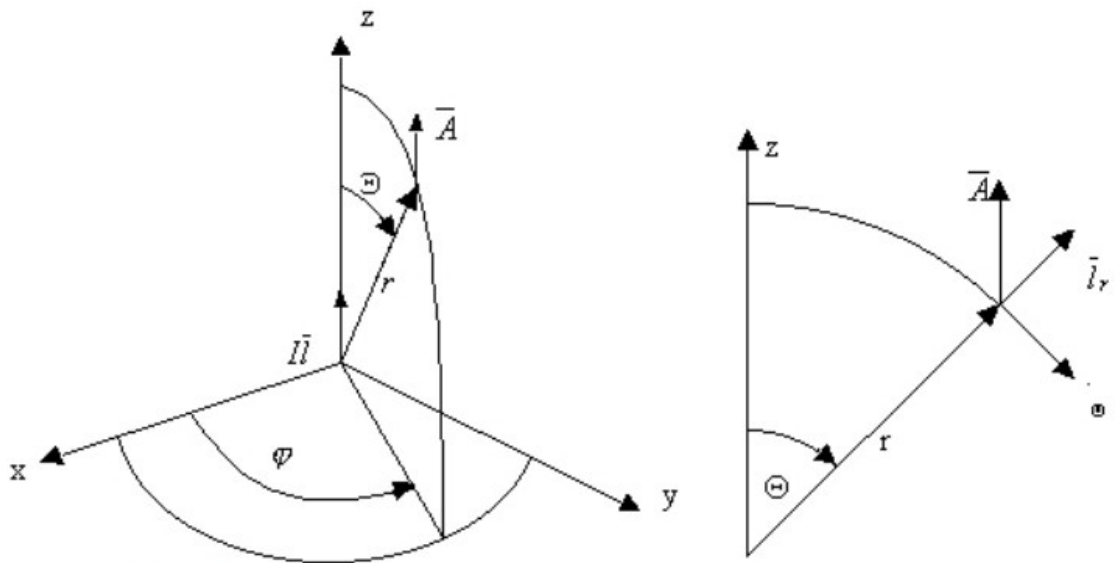
dla przebiegów harmoniczných o pulsacji  $\omega$ :  $I = j\omega q \Rightarrow q = \frac{1}{j\omega} I = -\frac{j}{\omega} I$

$\vec{p} = q \cdot \vec{l} = -\frac{j}{\omega} I \vec{l}$  - moment elektryczny odcinka o długości  $l$ , w którym płynie prąd przemienny o natężeniu  $I$ .

Wartość (chwilowa) natężenia prądu w każdym punkcie oscylatora elementarnego jest taka sama.

$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} I \vec{l} \frac{e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}}{r}$  - potencjał wektorowy oscylatora elementarnego (w ośrodku  $\epsilon, \mu = \text{const } \sigma = 0$ )

$$\vec{H}_e = -j \frac{I \vec{l}}{4\pi \epsilon \omega} \frac{e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}}{r}$$



$$l_r = l \cos \theta$$

$$l_\theta = -l \sin \theta$$

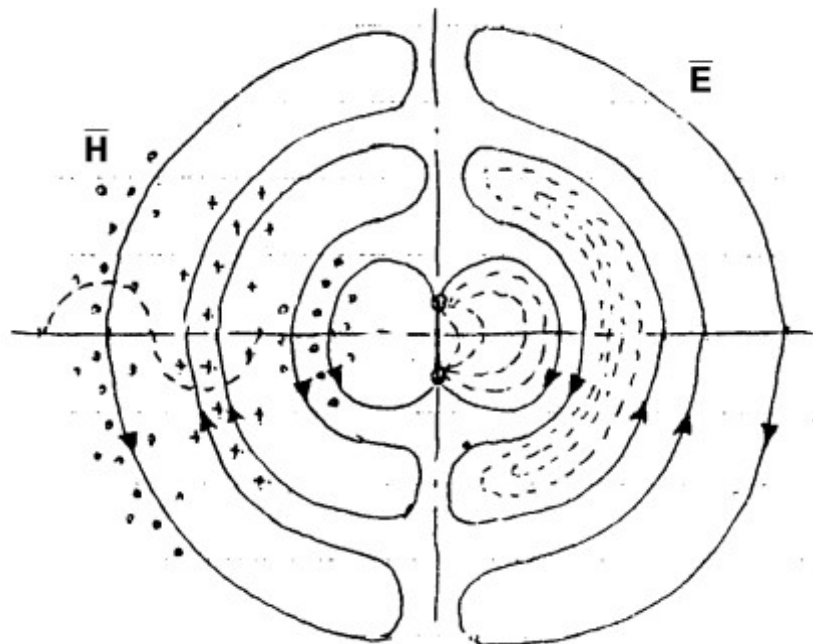
$$l_\varphi = 0$$

$$E_r = -j \frac{2Il \cos \theta e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}}{4\pi \epsilon \omega r^3} \left( 1 + j \frac{2\pi r}{\lambda} \right)$$

$$E_\theta = -j \frac{2Il \sin \theta e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}}{4\pi \epsilon \omega r^3} \left( 1 + j \frac{2\pi r}{\lambda} - \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \right)^2 \right)$$

$$E_\varphi = 0$$

Linie pola  $\vec{H}$  tworzą koła koncentryczne z osią oscylatora, linie równoleżnikowe. Linie wektora  $\vec{E}$  leżą w płaszczyznach południkowych.



- Pole elektromagnetyczne w małych odległościach od oscylatora:

$$\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 \ll \frac{2\pi r}{\lambda} \ll 1, \quad e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} = 1$$

$$H_r = 0, \quad H_\theta = 0, \quad H_\varphi = \frac{I l \sin \Theta}{4\pi \epsilon r^2}$$

$$E_r = -j \frac{2I l \cos \Theta}{4\pi \epsilon \omega r^3} = \frac{2p \cos \Theta}{4\pi \epsilon r^3}$$

$$E_\theta = -j \frac{I l \sin \Theta}{4\pi \epsilon \omega r^3} = \frac{p \sin \Theta}{4\pi \epsilon r^3}$$

$$E_\varphi = 0$$

Pole elektrostatyczne oscylatora jest w małej odległości identyczne z polem dipola elektrostatycznego (ale jest to znowu pole pulsujące). Pole  $\vec{H}$  i  $\vec{E}$  są w obszarze bliskim kwazistacjonarne.

- Pole elektromagnetyczne w dużych odległościach od oscylatora elementarnego.

$$\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 \gg \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1 \quad - \text{można pominąć człony z niskimi potęgami} \quad \frac{2\pi r}{\lambda}$$

$$H_r = 0, \quad H_\theta = 0, \quad H_\varphi = j \frac{1}{2} \cdot \frac{I l \sin \Theta e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}}{\lambda r}$$

- pole elektryczne i magnetyczne są współfazowe
- pole E jest prostopadłe do H.
- $\frac{E_\theta}{H_\varphi} = Z_f$

**Opór promieniowania** – jest to taki opór zastępczy, w którym po dołączeniu do źródła zasilającego oscylator (anteny) wydzielą się moc równa mocy promieniowanej przez oscylator (anteny).

$$R_{pr} = 80\pi^2 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \quad - \text{opór promieniowania oscylatora elementarnego w wolnej przestrzeni.}$$

## 16. Falowody. Fale typu TE i TM. Częstotliwość graniczna. Mody. Rozpływ linii sił pola i prądów dla modu podstawowego. Szczeliny w falowodach.

**Falowód** jest pustą rurą metalową nie mającą przewodnika wewnętrznego. Przekroje poprzeczne falowodów mogą mieć różne kształty, od prostokątów i okręgów do bardziej skomplikowanych. Stosuje się także pełne rury z dielektryka. Stosowanie falowodów jest charakterystyczne dla techniki mikrofalowej (fale centymetrowe i milimetrowe).

**Poprzeczna fala elektryczna TE (H):** (tylko pole elektryczne ma składową podłużną)

$$E_z = 0, \quad H_z \neq 0$$

**Poprzeczna fala magnetyczna TM:**

$$E_z \neq 0, \quad H_z = 0$$

**Mod** jest charakterystycznym rozkładem pola elektromagnetycznego odpowiadającym danemu kątowni rozchodzenia się fal w falowodzie. Mody dzieli się na:

- TE {  $E_y, H_z, H_x$  } (Transverse Electric) - mody których natężenie pole elektrycznego w kierunku rozchodzenia się jest zerowa.
- TM {  $H_y, E_z, E_x$  } (Transverse Magnetic) - mody których indukcja magnetyczna w kierunku rozchodzenia się jest zerowa.
- TEM (Transverse ElectroMagnetic) - mody których natężenie pola elektrycznego i indukcja magnetyczna wzdłuż kierunku rozchodzenia jest zerowa.
- Hybrydowe - mody nie spełniające powyższych warunków.

**Częstotliwością graniczną** (krytyczną)  $f_{gr}$  nazywamy taką częstotliwość, dla której wyrażenie pod pierwiastkiem (a tym samym  $\gamma_z$ ) jest równe zero.

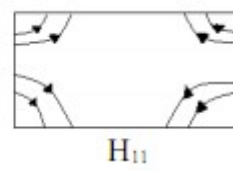
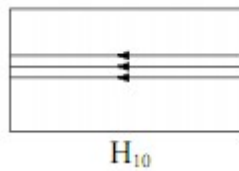
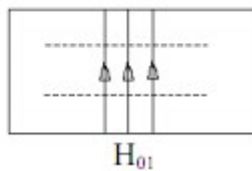
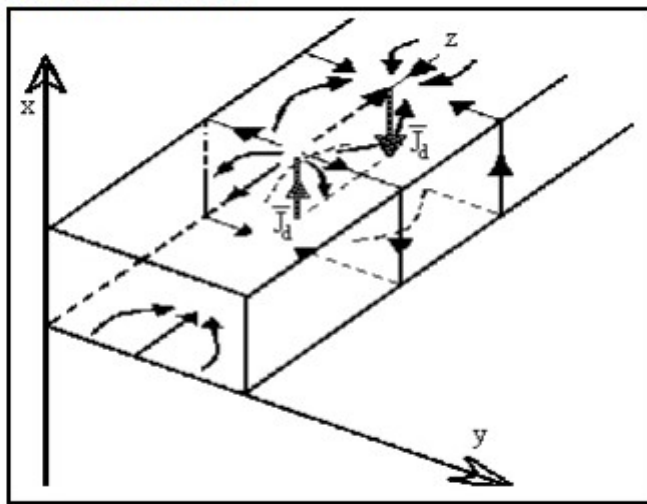
$$f_{gr} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Częstotliwość graniczna zależy od rozmiarów falowodu (a, b) jak również od rodzaju fali (m, n).

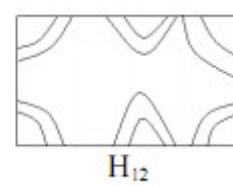
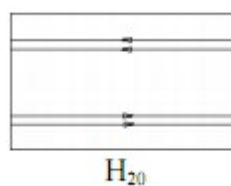
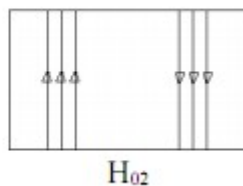
Można też uprościć zapis:  $f_{gr} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$

Tym samym długość fali wynosi:  $\lambda_{gr} = \frac{v}{f_{gr}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$

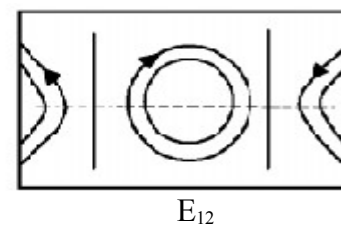
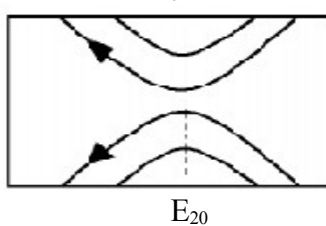
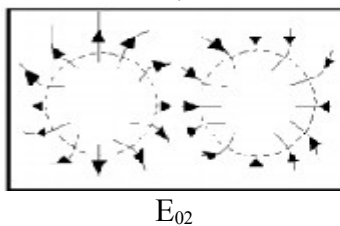
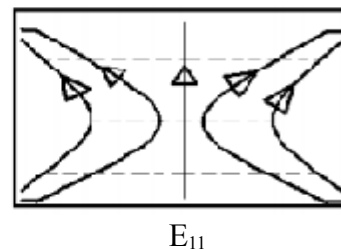
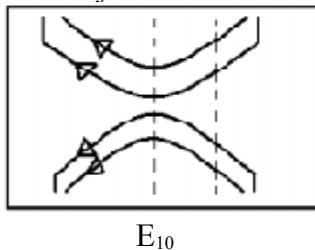
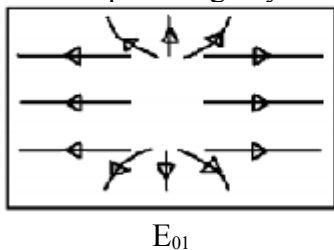
Rozpływ prądów w ściankach falowodu:



Rozkład pola elektrycznego dla kilku rodzajów:



Rozkład pola magnetycznego dla kilku rodzajów:



**Szczelina typu A** – równoległa do linii prądów powierzchniowych, nieco ten rozptyw zakłóca, mało – gdy wąska nie powoduje zmian w przepływie energii wewnątrz falowodu, szczeliny pomiarowe – sondy,

**Szczelina typu B** – przecinają linie prądu, brzozy szczeliny ładują się, w szczelinie powstaje pole  $\vec{E}$ , prąd przesunięcia  $\vec{J}_d$ , pole  $\vec{H}$  - szczelina wypromieniowuje energię.

Wykorzystanie – anteny falowodowe, sprzęganie dwóch falowodów.

