



Interpolacja, aproksymacja całkowanie

Interpolacja

Krzywa przechodzi przez punkty kontrolne

Aproksymacja

Punkty kontrolne jedynie „sterują” kształtem krzywej



INTERPOLACJA

- Zagadnienie interpolacji można sformułować następująco: na przedziale $[a; b]$ danych jest $n+1$ różnych punktów $x_0, x_1, \dots, x_n$, które nazywamy *węzłami interpolacji*, oraz wartości pewnej funkcji $y=f(x)$ w tych punktach $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, \dots, f(x_n)=y_n$.
- Zadaniem interpolacji jest wyznaczenie przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami oraz oszacowanie błędu tych przybliżonych wartości.



INTERPOLACJA

- W tym celu należy znaleźć funkcję $F(x)$, zwaną *funkcją interpolującą*, która w węzłach interpolacji przyjmuje takie same wartości co funkcja $y=f(x)$.
- Interpolacja jest w pewnym sensie zadaniem odwrotnym do tablicowania funkcji. Przy tablicowaniu mając analityczną postać funkcji budujemy tablicę wartości, przy interpolacji natomiast na podstawie tablicy wartości funkcji określamy jej postać analityczną.



INTERPOLACJA

- Standardowe procedury Matlabu realizują interpolację za pomocą wielomianów pierwszego i trzeciego stopnia oraz funkcji sklejanых stopnia trzeciego.



Funkcje interpolujące

`yi=interp1(x,y,xi,metoda)`

Zwraca wektor y_i , będący wartościami funkcji jednej zmiennej $y=f(x)$ w punktach określonych wektorem x_i ; węzły interpolacji określają wektory x i y ; metoda - łańcuch znaków określający metodę interpolacji



Metody interpolacji

- ‘linear’ - interpolacja liniowa,
- ‘spline’ - interpolacja funkcjami sklejanymi stopnia trzeciego,
- ‘cubic’ - interpolacja wielomianami stopnia trzeciego.

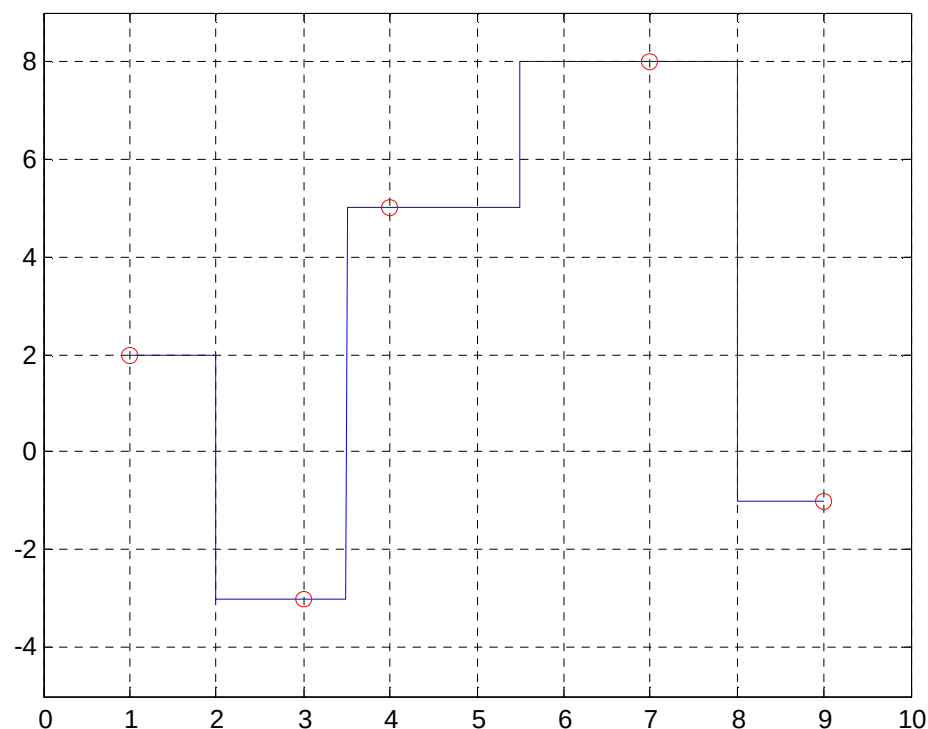
Wszystkie metody interpolacji wymagają, aby ciąg x był monotoniczny.



Metoda najbliższego sąsiada z ang. nearest

- Węzły interpolacji:

x	1	3	4	7	9
y	2	-3	5	8	-1





Metoda liniowa z ang. linear

- Węzły interpolacji:

x	1	3	4	7	9
y	2	-3	5	8	-1

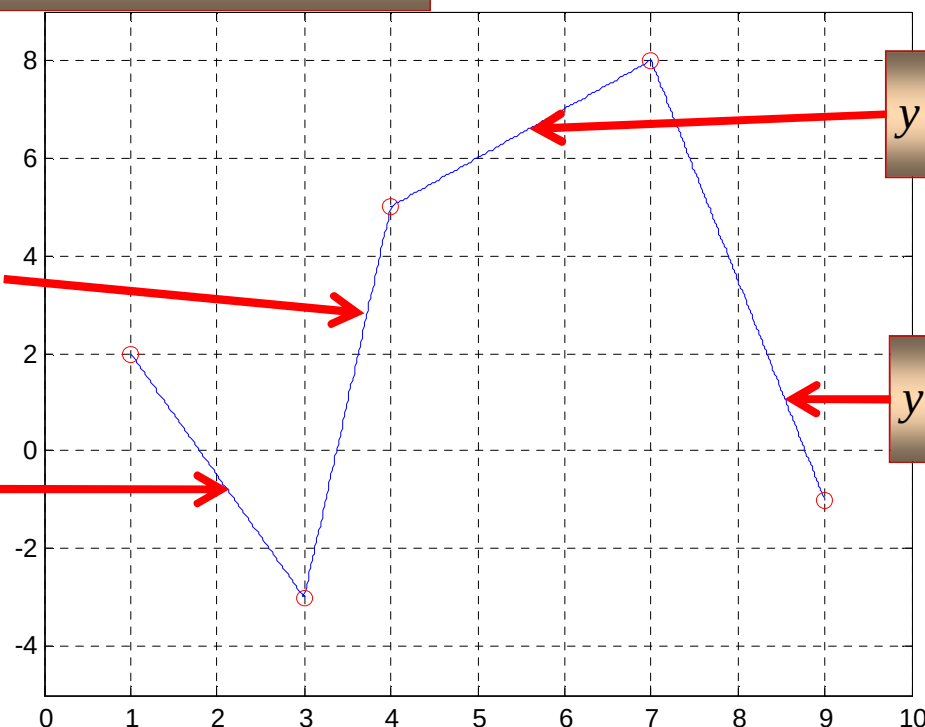
$$y = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$y = \frac{x-4}{3-4}(-3) + \frac{x-3}{3-4}5$$

$$y = \frac{x-3}{1-3}2 + \frac{x-1}{3-1}(-3)$$

$$y = \frac{x-7}{4-7}5 + \frac{x-4}{7-4}8$$

$$y = \frac{x-9}{7-9}8 + \frac{x-7}{9-7}(-1)$$





Metoda funkcji sklejanych-przykład z ang. spline

- Węzły interpolacji:

x	1	3	4	7	9
y	2	-3	5	8	-1

Interpolacja przeprowadzana jest za pomocą wielomianów 3-ciego stopnia. Każdy wielomian ma cztery współczynniki. W naszym przykładzie mamy również cztery wielomiany (p_0, p_1, p_2, p_3), zatem należy ułożyć 16 równ. Przyjmując, że wielomiany dokładnie muszą przechodzić przez dwa kolejne węzły otrzymamy 8 równań. Ponadto chcemy, aby pierwsze i drugie pochodne kolejnych wielomianów dla wewnętrznych węzłów były równe, otrzymujemy następne 6 równań. Do dyspozycji pozostają, zatem dwa wolne współczynniki, jeden dla p_0 , a drugi dla p_3 . Mamy więc pewną dowolność. Możemy np. przyjąć, że pierwsza pochodna $\left. \frac{p_0(x)}{dx} \right|_{x=1} = 0$, $\left. \frac{p_3(x)}{dx} \right|_{x=9} = 0$

Otrzymujemy wówczas, tzw. funkcje sklepane naturalne.

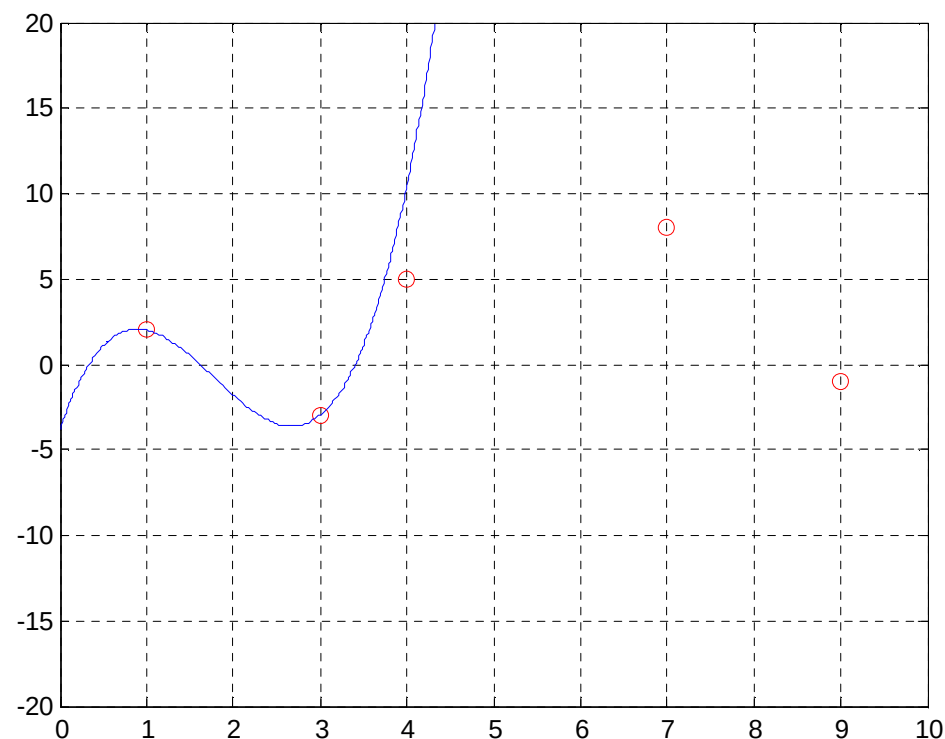


Metoda funkcji sklejanych z ang. spline

- Węzły interpolacji:

x	1	3	4	7	9
y	2	-3	5	8	-1

Wielomian $p_0(x)$



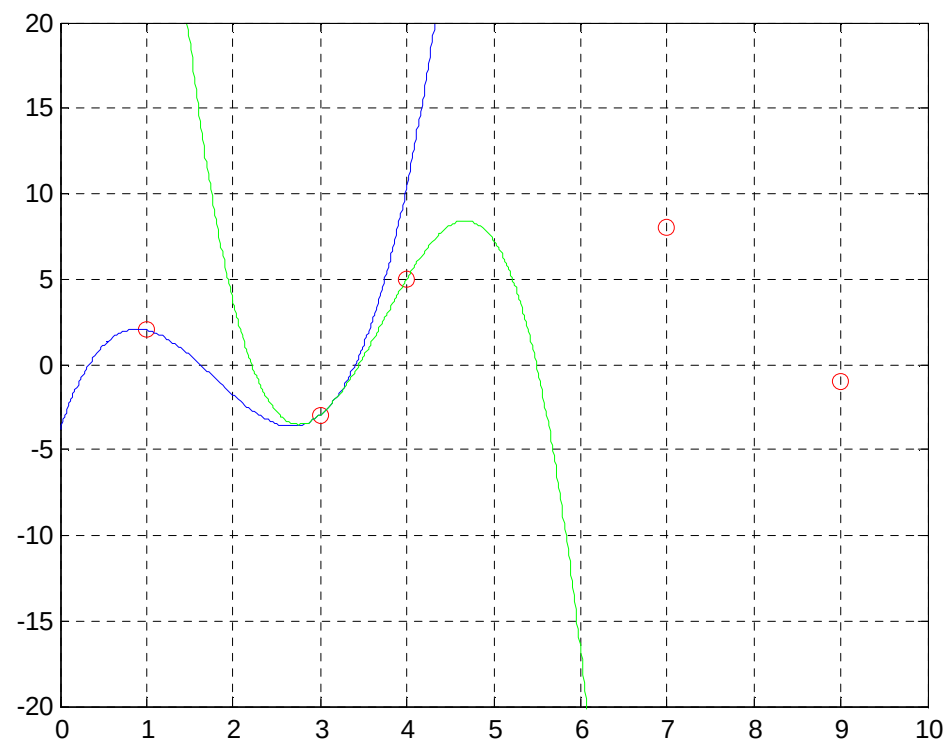


Metoda funkcji sklejanych z ang. spline

- Węzły interpolacji:

x	1	3	4	7	9
y	2	-3	5	8	-1

Wielomian $p_1(x)$



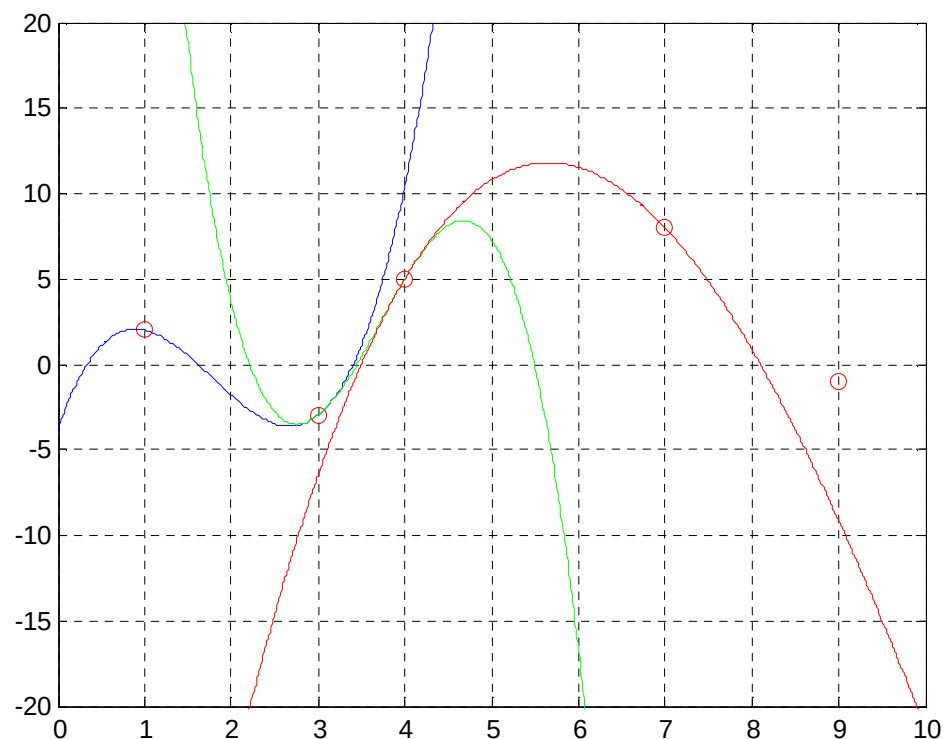


Metoda funkcji sklejanych z ang. spline

- Węzły interpolacji:

x	1	3	4	7	9
y	2	-3	5	8	-1

Wielomian $p_2(x)$



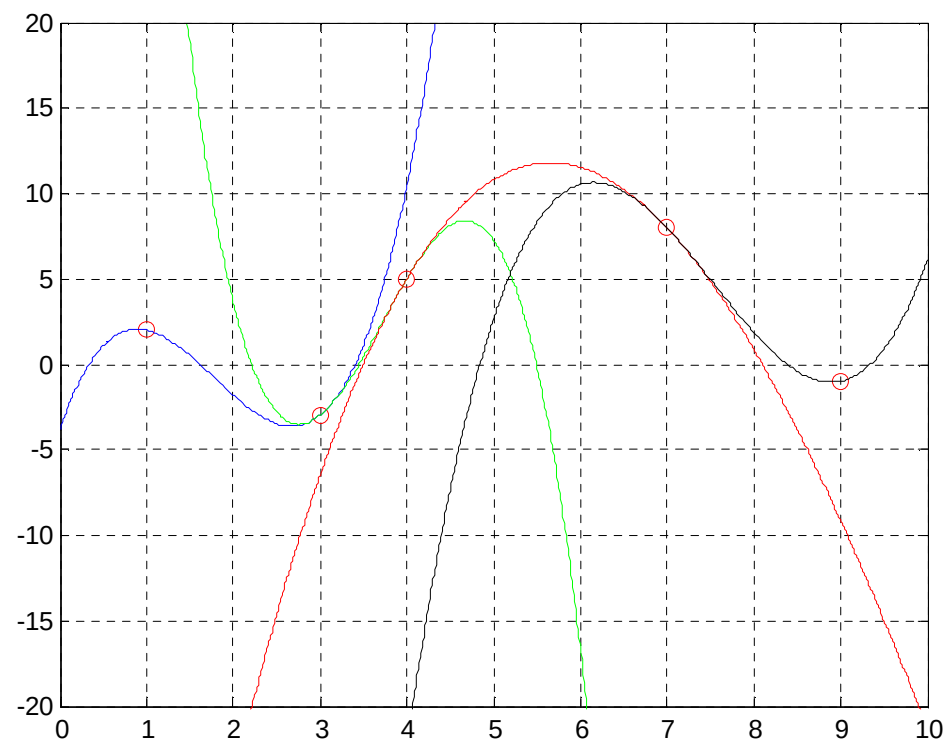


Metoda funkcji sklejanych z ang. spline

- Węzły interpolacji:

x	1	3	4	7	9
y	2	-3	5	8	-1

Wielomian $p_3(x)$





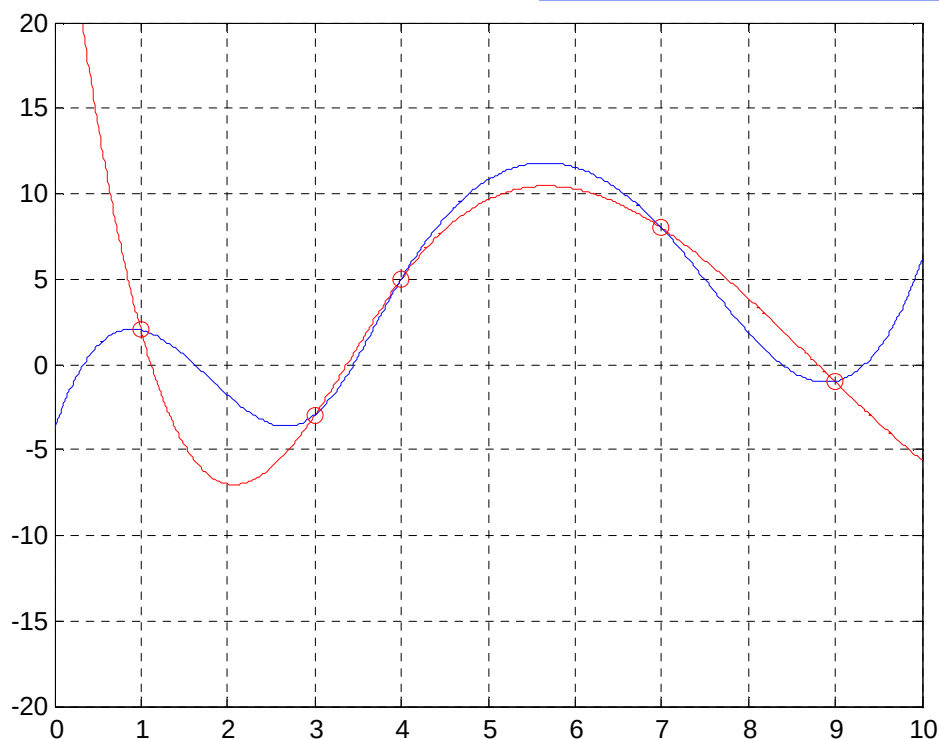
Metoda funkcji sklejanych z ang. spline

- Węzły interpolacji:

x	1	3	4	7	9
y	2	-3	5	8	-1

$$\left. \frac{p_0(x)}{dx} \right|_{x=1} = 1, \quad \left. \frac{p_3(x)}{dx} \right|_{x=9} = -1$$

Warunki brzegowe przyjęte
w przykładzie



Warunki brzegowe przyjęte
w Matlabie

$$\left. \frac{dp_0(x)}{dx} \right|_{x=1} = \left. \frac{dp_1(x)}{dx} \right|_{x=1} = -\frac{649}{35},$$
$$\left. \frac{dp_2(x)}{dx} \right|_{x=9} = \left. \frac{dp_3(x)}{dx} \right|_{x=9} = -\frac{172}{35}$$



Aproksymacja

- Jest to zagadnienie bardziej ogólne. Funkcja dana i funkcja szukana nie muszą przyjmować tych samych wartości w punktach węzłowych.
- Funkcję $f(x)$, znaną lub określoną tablicą wartości, będziemy *aproksymować* (zastępować) inną funkcją $F(x)$, zwaną *funkcją aproksymującą* lub *przybliżeniem funkcji $f(x)$* .



Kryteria błędu aproksymacji

- Dobiera się tak parametry funkcji $F(x)$ tak, aby suma kwadratów różnic między wartością zmierzona, a wynikającą z przybliżonej funkcji była możliwie najmniejsza

$$J = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - F(x_i))^2 \rightarrow \min.$$

- Dobiera się tak parametry funkcji $F(x)$ tak, aby maksymalna wartość bezwzględna różnicy między wartością zmierzona, a wynikającą z przybliżonej funkcji była możliwie najmniejsza

$$\max |y_i - F(x_i)| \rightarrow \min.$$



Aproksymacja

- Standardową metodą aproksymacji w Matlabie jest *aproksymacja średniokwadratowa* wielomianami wybranego stopnia.
- Polecenie: **a=polyfit(x,y,n)** znajduje wektor a współczynników wielomianu stopnia n najlepiej „dopasowanego” do danych wektorów x, y. Wartość wielomianu aproksymującego w dowolnym punkcie x0 (wektorze x0) można wyznaczyć, korzystając z polecenia **polyval(a,x0)**.



Aproksymacja

- Najbardziej podstawową, a zarazem najprostszą metodą aproksymacji średniokwadratowej jest aproksymacja funkcją liniową, zwana także regresją liniową.

%Przykład na regresje liniowa

clear all

close all

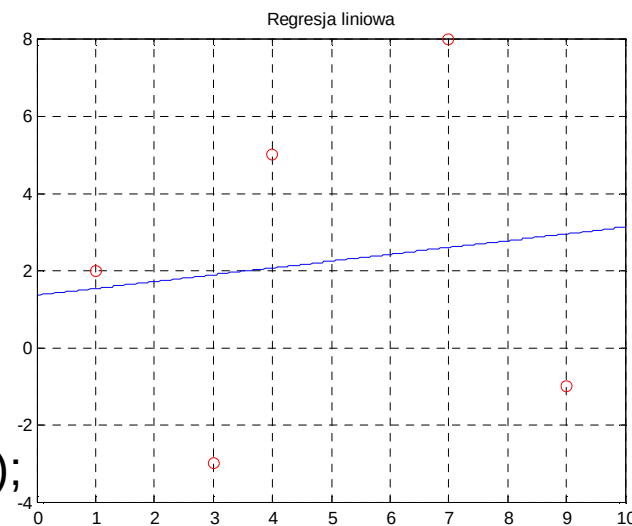
x=[1 3 4 7 9];y=[2 -3 5 8 -1];

a=polyfit(x,y,1);

xp=linspace(0,10,300);

yp=polyval(a,xp);grid

plot(x,y,'or',xp,yp,'b'),grid,title('Regresja liniowa');

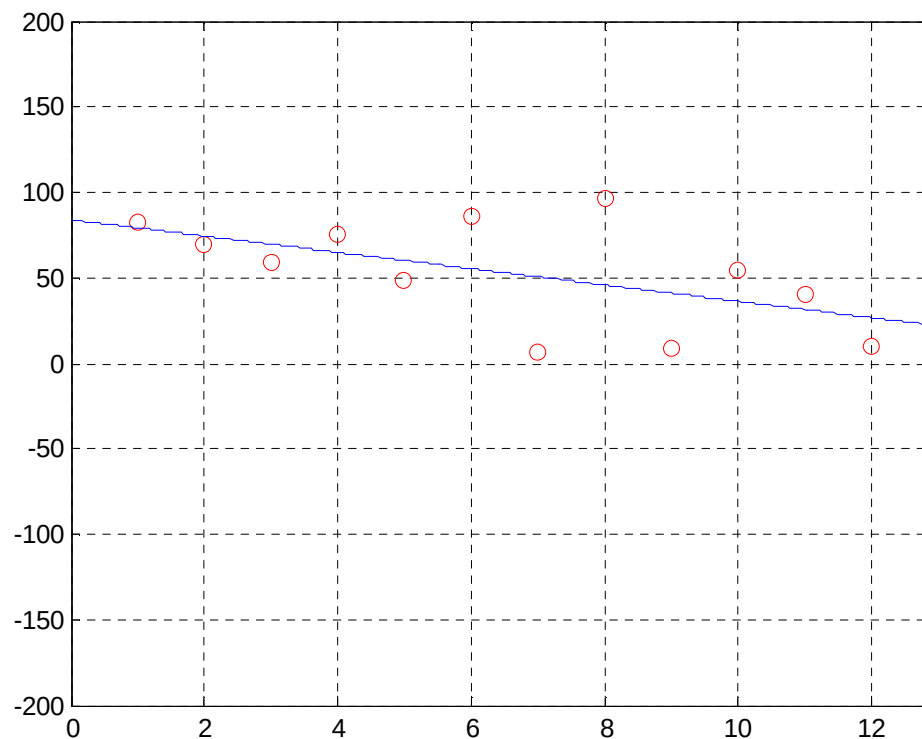


$$F(x) = 0.1765x + 1.3529$$



Aproksymacja

$n=1$

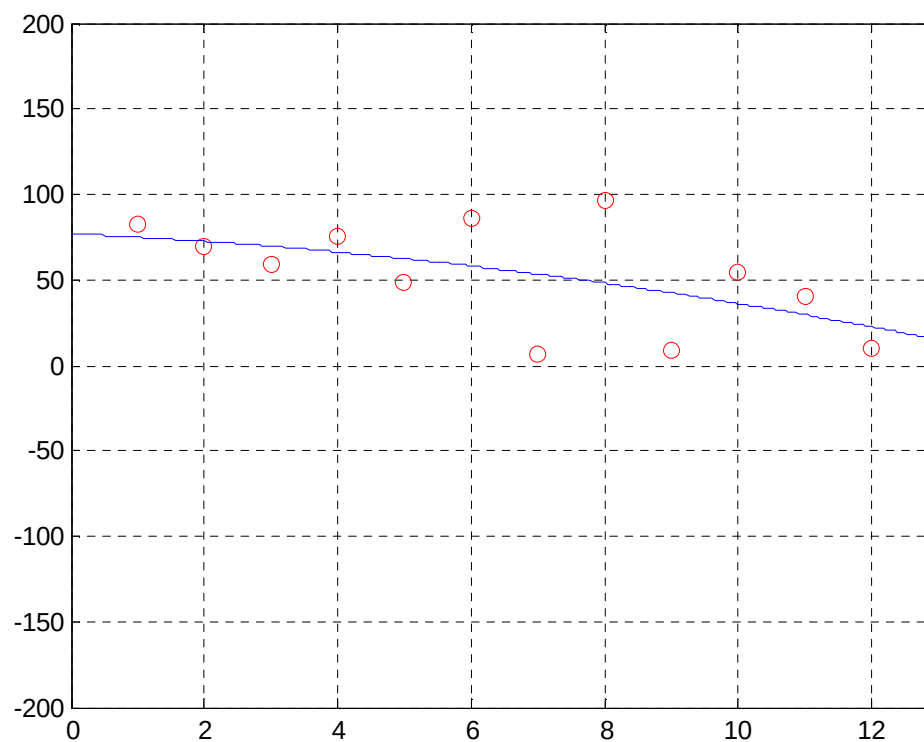


Mamy 12 wartości pomiarowych (maksymalny stopień wielomianu aproksymującego wynosi 11, wówczas mamy wielomian Lagrange'a)



Aproksymacja

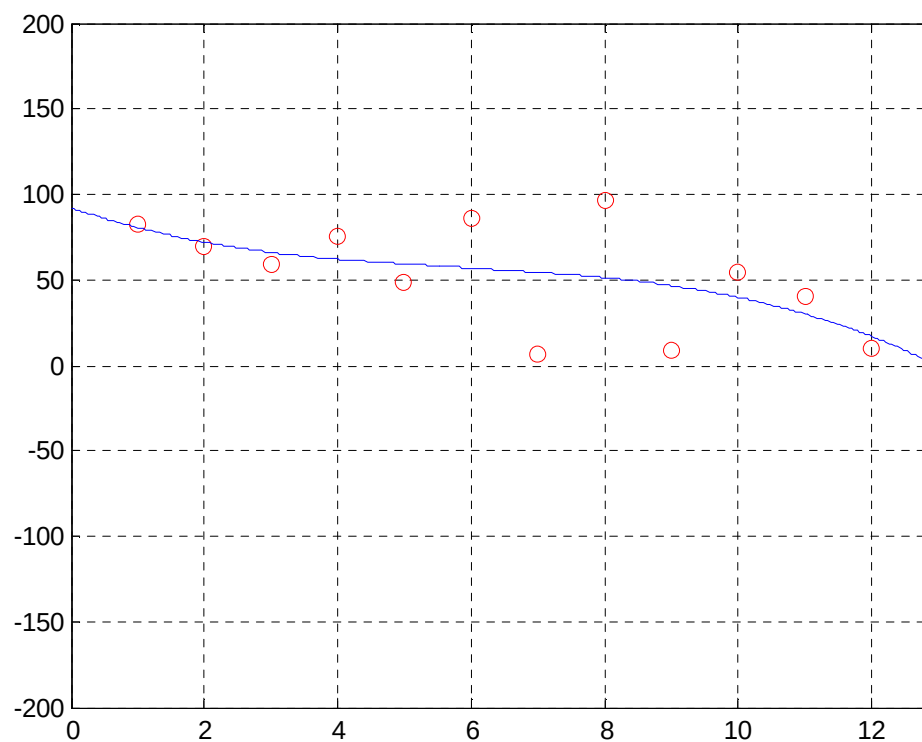
$n=2$





Aproksymacja

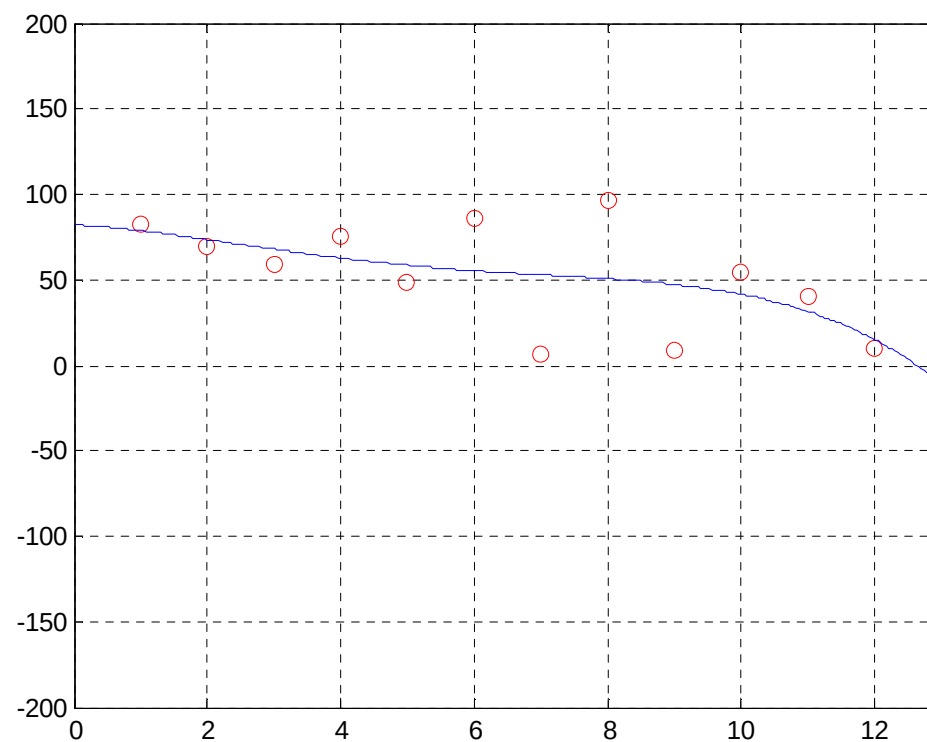
$n=3$





Aproksymacja

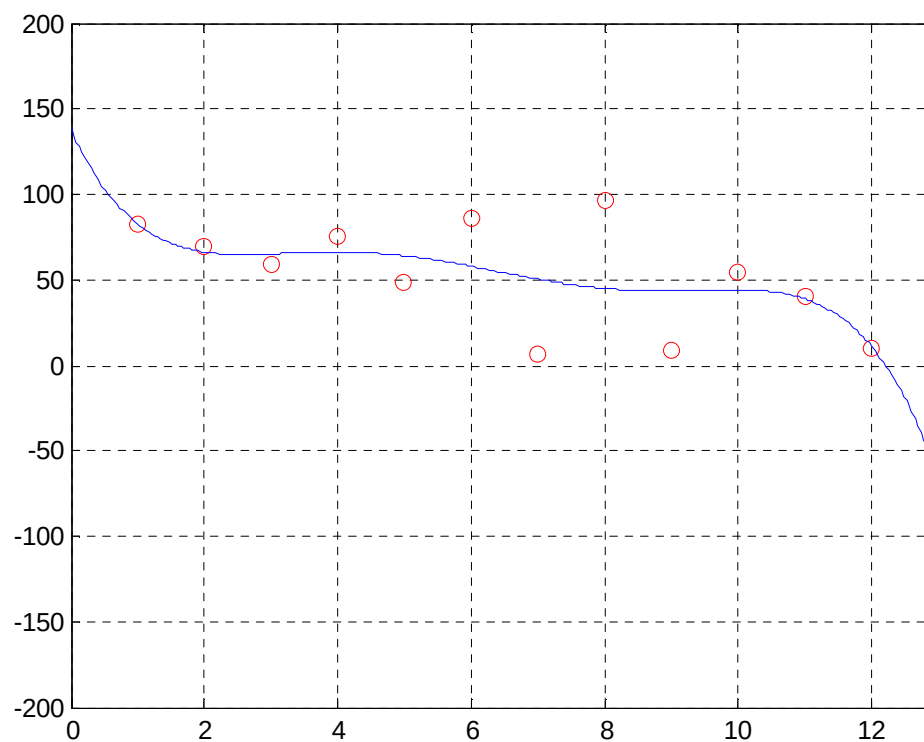
$n=4$





Aproksymacja

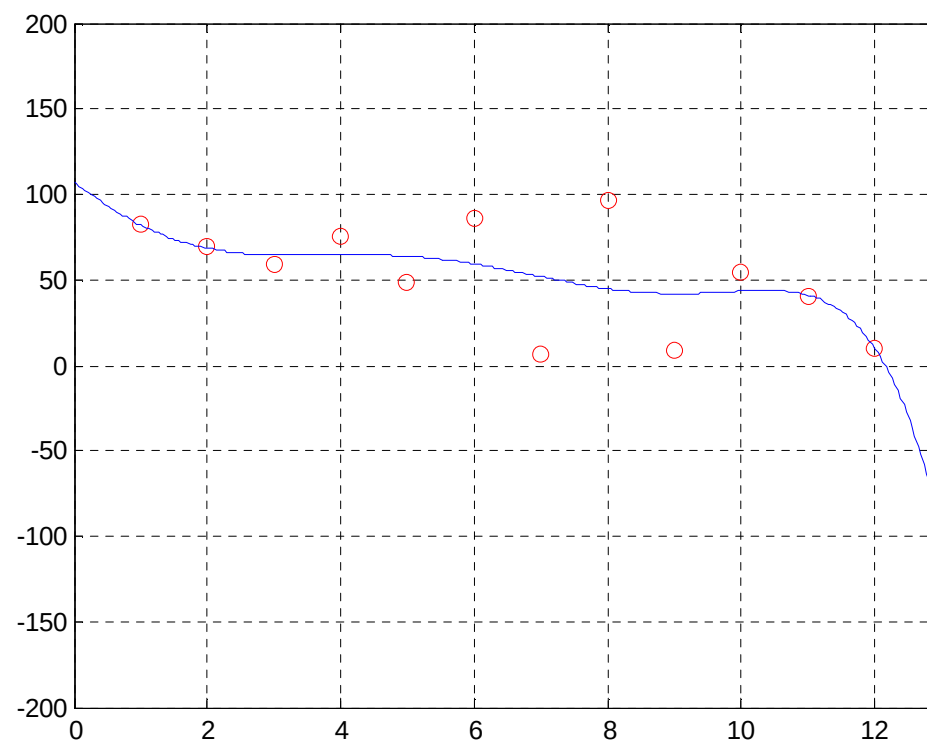
$n=5$





Aproksymacja

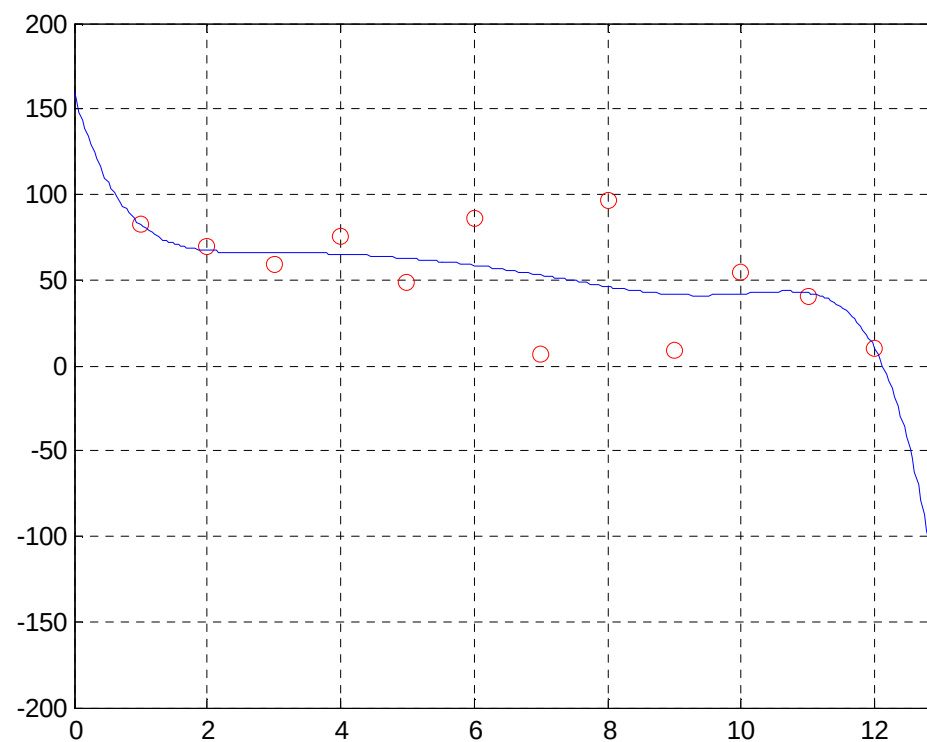
$n=6$





Aproksymacja

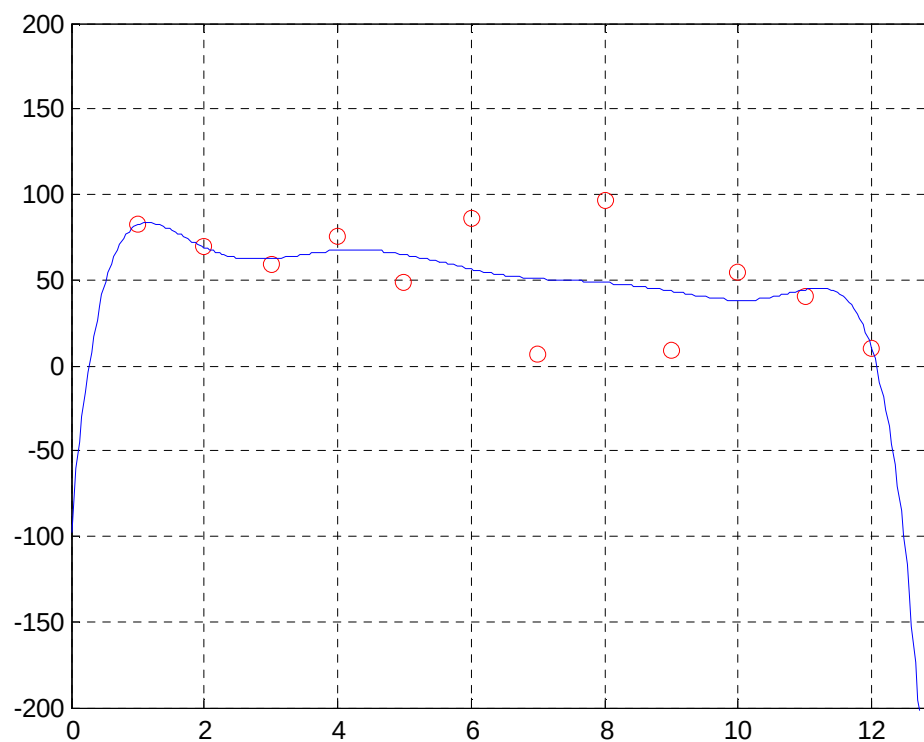
$n=7$





Aproksymacja

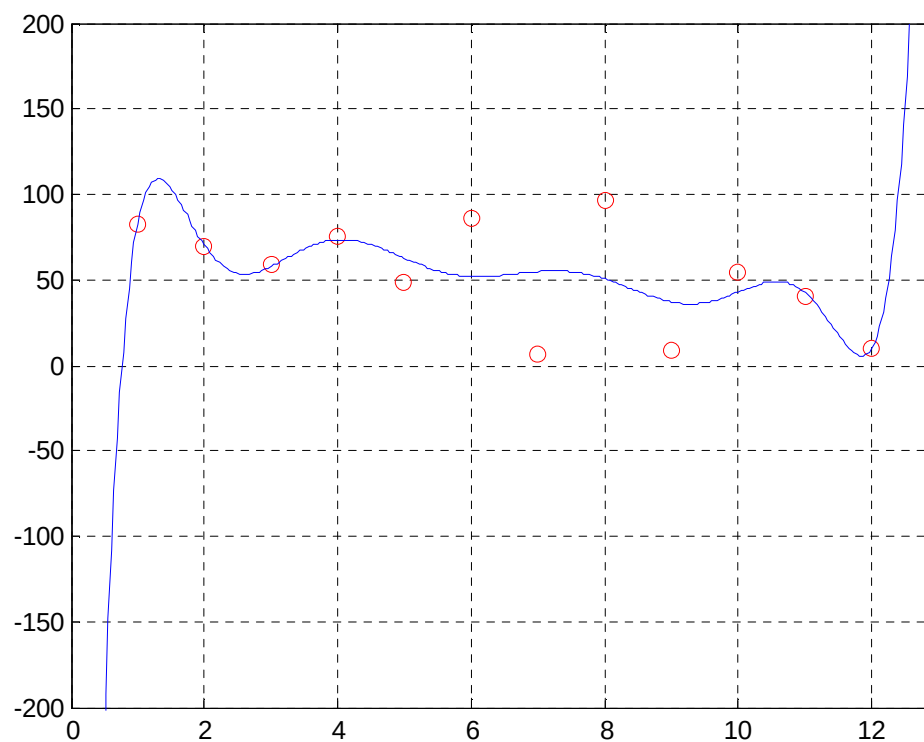
$n=8$





Aproksymacja

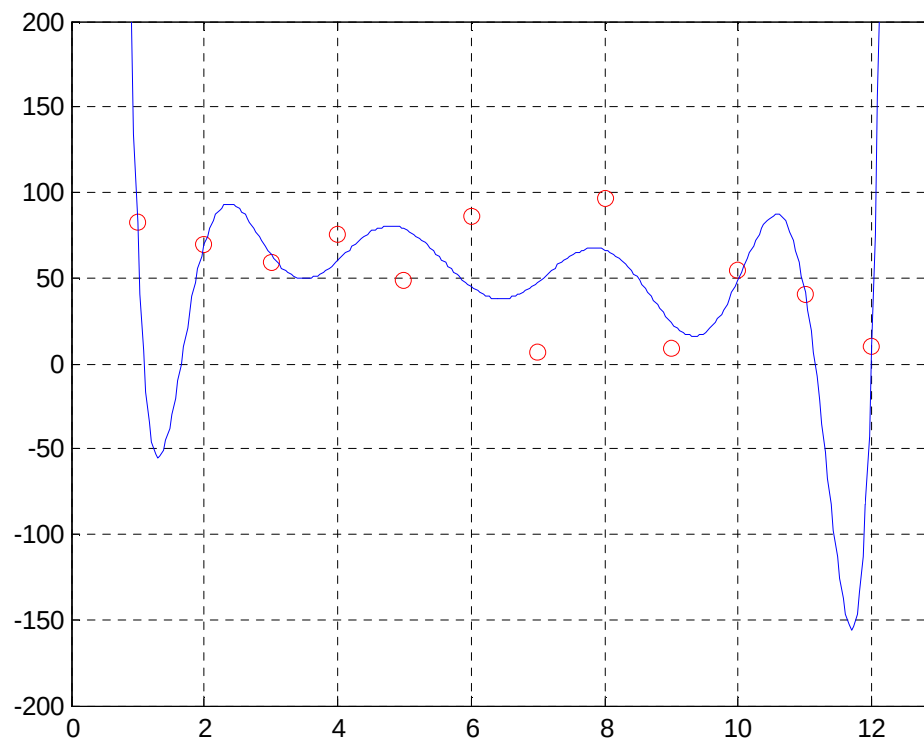
$n=9$





Aproksymacja

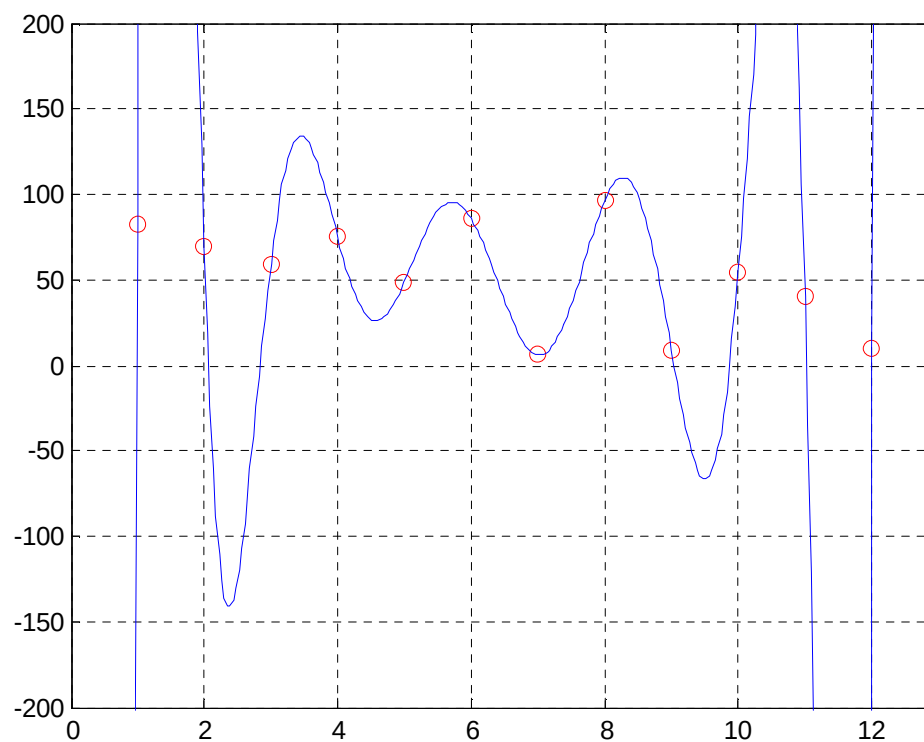
$n=10$





Aproksymacja

$n=11$





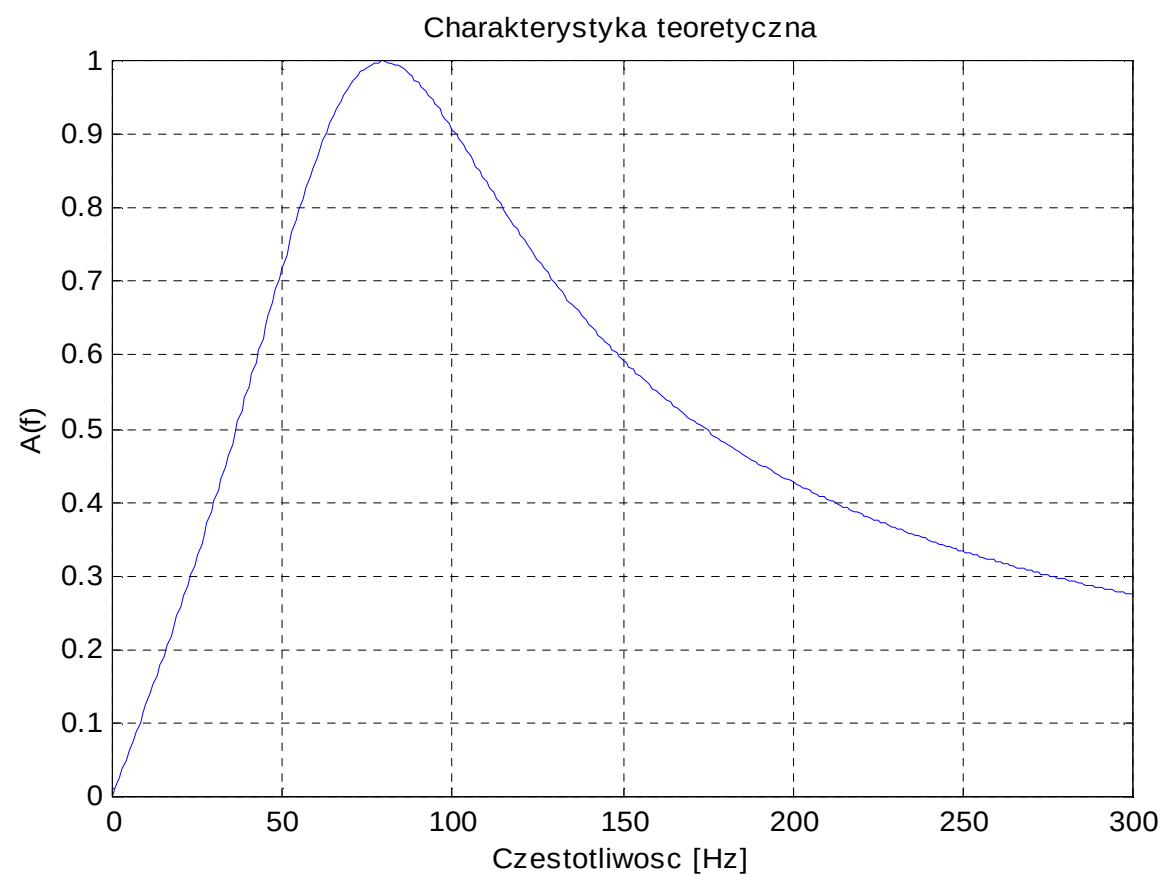
Dane są punkty pomiarowe charakterystyki amplitudowej pewnego filtra elektrycznego. Pomiary wykonano co 10Hz.

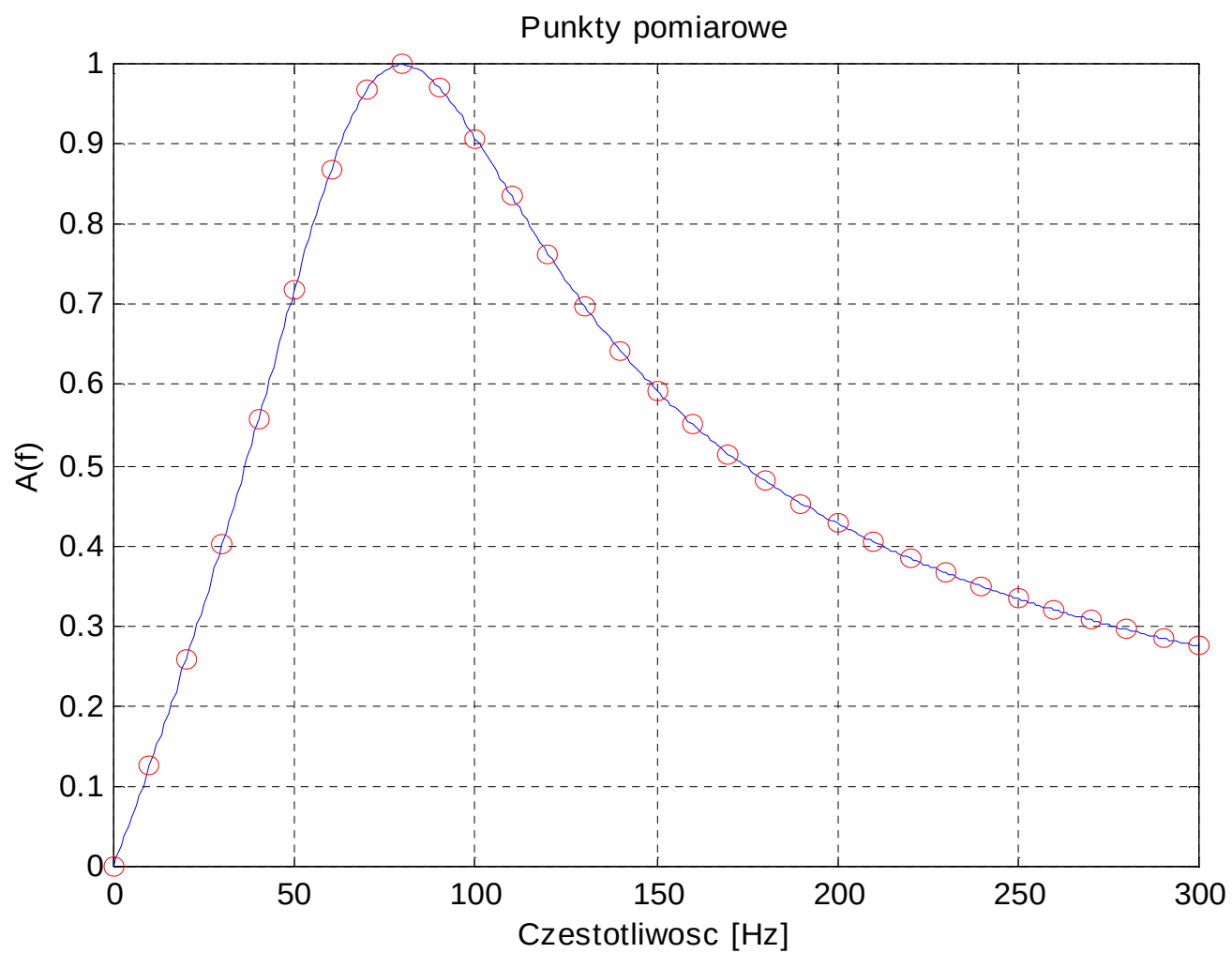
$$H(s) = \frac{500s}{s^2 + 500.5 * s + 2.5 * 10^5};$$

$$A(\omega) = A(2\pi f) = |H(s)|_{s=j2\pi f};$$

Znajdź współczynniki wielomianu aproksymującego stopnia czwartego (i ewentualnie wyższego, takiego by uznać wyniki aproksymacji za zadowalające).

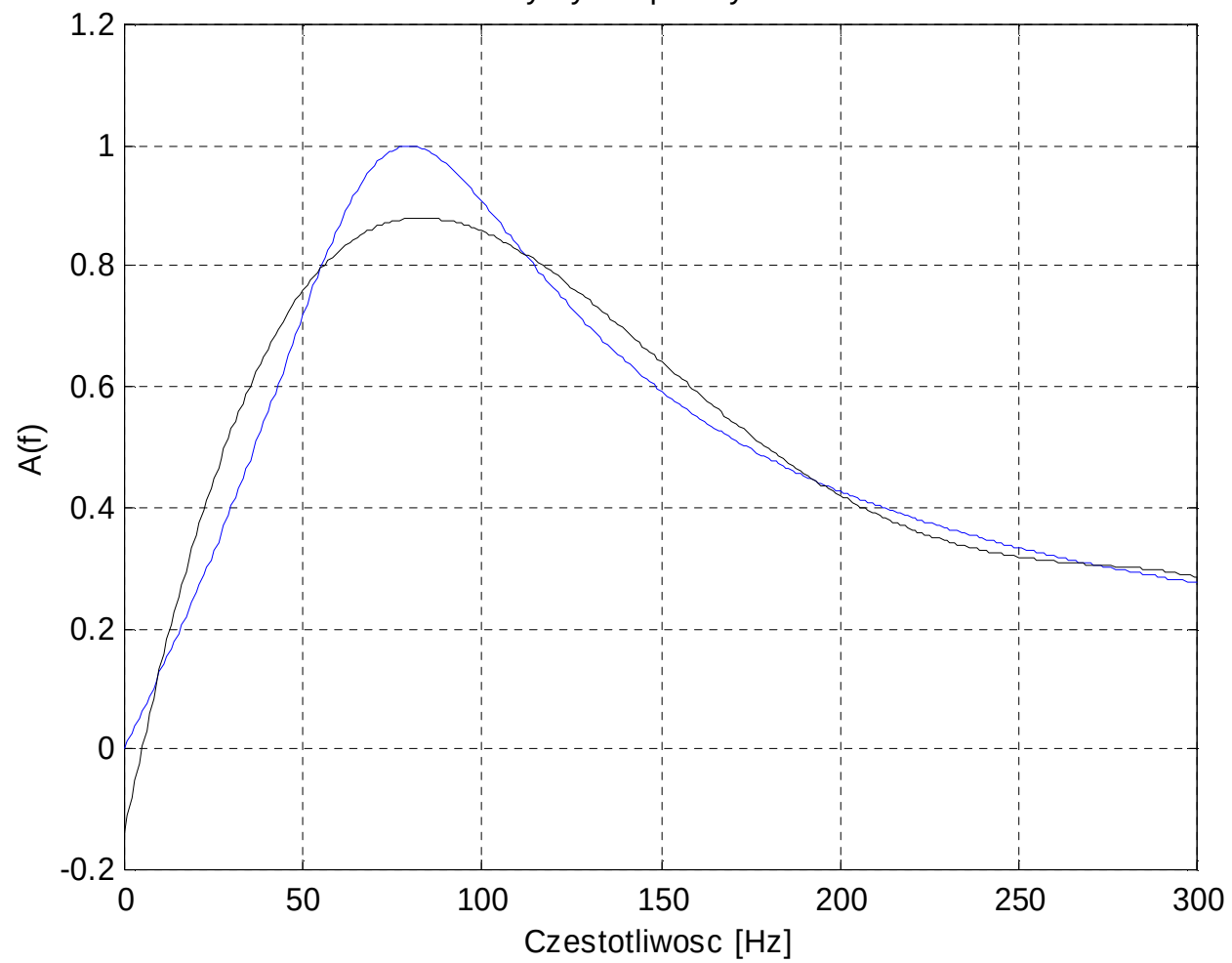
Wykreśl na jednej figurze charakterystykę otrzymaną z aproksymacji oraz teoretyczną.

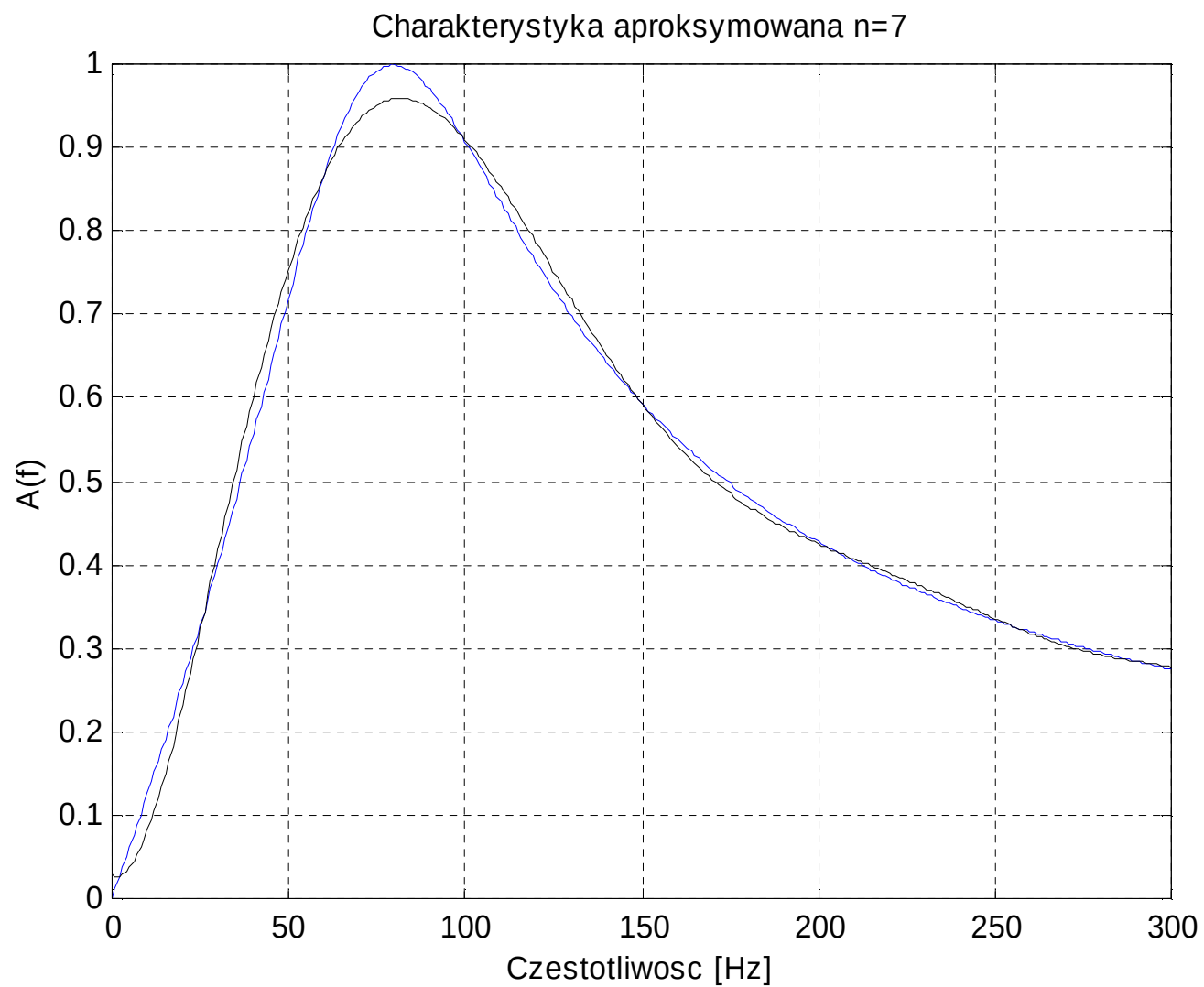


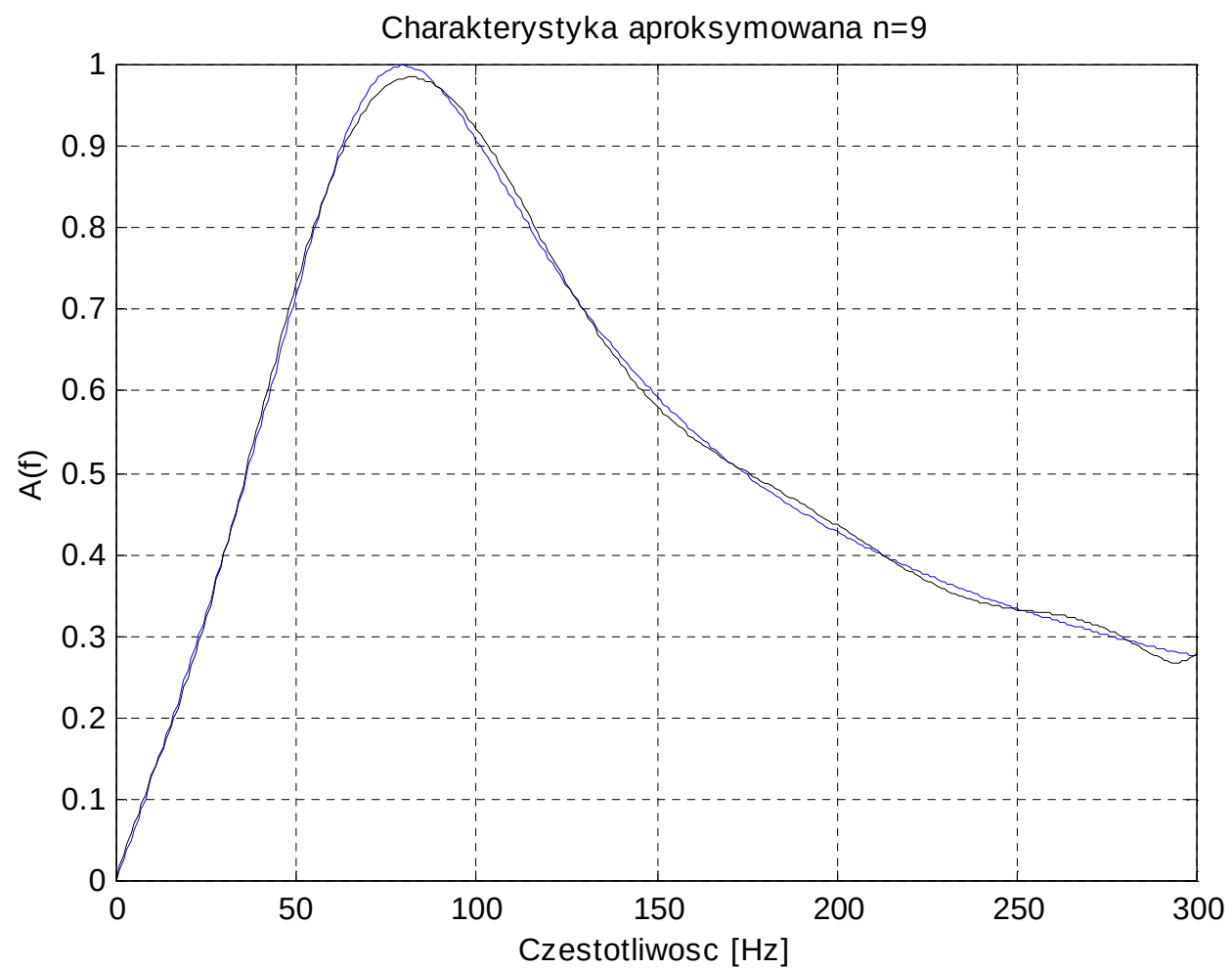




Charakterystyka aproksymowana $n=4$



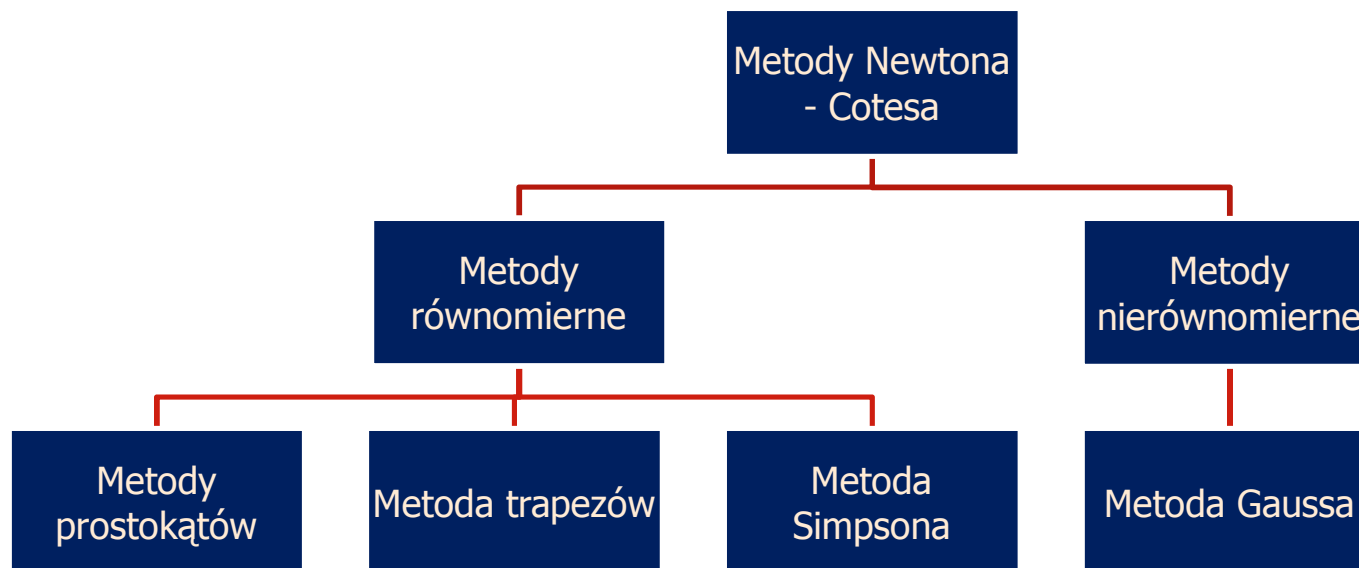






Klasyfikacja metod całkowania numerycznego

Najbardziej ogólną metodą całkowania numerycznego jest metoda Newtona-Cotesa. Jest ona oparta na interpolacji funkcji $y = f(x)$ w m odcinkach przez wielomian interpolujący Lagrange'a stopnia n .





Metoda prostokątów

Przedział całkowania $\langle x_p, x_k \rangle$ dzielimy na $n + 1$ równo odległych punktów $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$:

dla $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$$x_i = x_p + i (x_k - x_p) / n$$

Dla każdych dwóch sąsiednich punktów wyznaczamy punkt środkowy t_i wg wzoru:

dla $i = 1, 2, \dots, n$

$$t_i = (x_{i-1} + x_i) / 2$$

Obliczamy odległość między dwoma sąsiednimi punktami.

$$dx = (x_k - x_p) / n$$



Metoda prostokątów

Pole prostokąta jest równe;

dla $i = 1, 2, \dots, n$

$$P_i = t_i \cdot dx$$

Wartość całej całki otrzymamy sumując te pola, czyli:

$$P = \int_{x_0}^{x_k} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n P_i$$



Metoda trapezów

Przedział całkowania $\langle x_p, x_k \rangle$ dzielimy na $n + 1$ równo odległych punktów $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$:

dla $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$$x_i = x_p + i (x_k - x_p) / n$$

Obliczamy odległość między dwoma sąsiednimi punktami.

$$dx = (x_k - x_p) / n$$



Metoda trapezów

Pole trapezu jest równe;

dla $i = 1, 2, \dots, n$

$$P_i = \frac{(x_i + x_{i-1})}{2} \cdot dx$$

Wartość całej całki otrzymamy sumując te pola, czyli:

$$P = \int_{x_0}^{x_k} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n P_i$$



Metoda Simpsona

(http://edu.i-lo.tarnow.pl/inf/alg/004_int/0004.php)

Przedział całkowania $\langle x_p, x_k \rangle$ dzielimy na $n + 1$ równo odległych punktów $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$:

dla $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$$x_i = x_p + i (x_k - x_p) / n$$

Dla każdych dwóch sąsiednich punktów wyznaczamy punkt środkowy t_i wg wzoru:

dla $i = 1, 2, \dots, n$

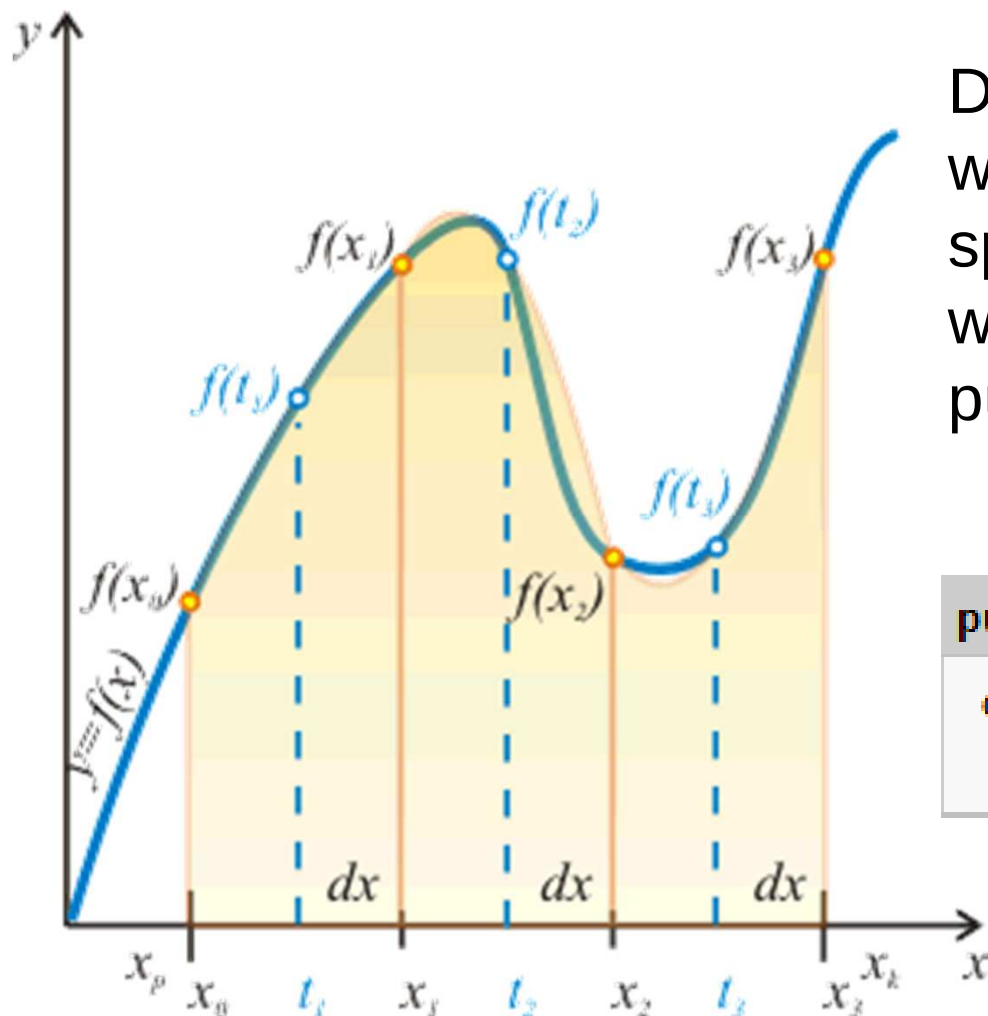
$$t_i = (x_{i-1} + x_i) / 2$$

Obliczamy odległość między dwoma sąsiednimi punktami.

$$dx = (x_k - x_p) / n$$



Metoda Simpsona



Dla każdego
wyznaczonego w ten
sposób punktu obliczamy
wartość funkcji $f(x)$ w tym
punkcie:

punkty podziałowe	punkty środkowe
dla $i = 0, 1, 2, \dots, n$ $f_i = f(x_i)$	dla $i = 1, 2, \dots, n$ $f_{ti} = f(t_i)$



Metoda Simpsona

W każdym podprzedziale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ przybliżamy funkcję za pomocą paraboli $g(x)$ o następującej postaci:

dla $i = 1, 2, \dots, n$

$$g_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$$

Parabola $g_i(x)$ musi przechodzić przez punkty: (x_{i-1}, f_{i-1}) , (t_i, f_{ti}) , (x_i, f_i) . Współczynniki a_i , b_i i c_i wyznaczymy zatem z układu trzech równań:

dla $i = 1, 2, \dots, n$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f_{i-1},$$

$$a_i t_i^2 + b_i t_i + c_i = f_{ti},$$

$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = f_i,$$



Metoda Simpsona

Pole pod parabolą w przedziale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ będzie równe całce oznaczonej:

$$\text{dla } i = 1, 2, \dots, n \quad P_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (a_i x^2 + b_i x + c_i) dx, \quad x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$$

Po kilku przekształceniach i uproszczeniach otrzymujemy ostateczny wzór:

$$\text{dla } i = 1, 2, \dots, n \quad P_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x) dx = \frac{x_k - x_p}{6n} (f_{i-1} + f_i + 4f_{ti})$$



Metoda Simpsona

Po przekształceniach można otrzymać wzór pozwalający obliczyć pole obszaru pod parabolą aproksymującą funkcję $f(x)$ w przedziale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Wartość całej całki otrzymamy sumując te pola, czyli:

$$P = \int_{x_0}^{x_k} f(x) dx \approx \frac{x_k - x_p}{6n} \left(\sum_{i=1}^n f_{i-1} + \sum_{i=1}^n f_i + 4 \sum_{i=1}^n f_{ti} \right)$$

Jest to wzór wyliczania przybliżonej wartości całki oznaczonej za pomocą metody Simpsona. Ponieważ w obliczanych sumach wartości funkcji się powtarzają dwukrotnie (z wyjątkiem pierwszej i ostatniej), do obliczeń komputerowych stosujemy efektywniejszy wzór otrzymywania powyższej sumy:



Metoda Simpsona

$$P = \int_{x_0}^{x_k} f(x) dx \approx \frac{x_k - x_p}{6n} \left(f_0 + f_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + 4 \sum_{i=1}^n f_{ti} \right)$$



Metoda Simpsona



Specyfikacja problemu

Dane wejściowe

x_p - początek przedziału całkowania, $x_p \in \mathbb{R}$

x_k - koniec przedziału całkowania, $x_k \in \mathbb{R}$

n - liczba punktów podziałowych, $n \in \mathbb{N}$

$f(x)$ - funkcja rzeczywista, której całkę liczymy

Dane wyjściowe

s - wartość całki oznaczonej funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle x_p, x_k \rangle$. $s \in \mathbb{R}$.

Zmienne pomocnicze

s_t - suma wartości funkcji w punktach środkowych, $s_t \in \mathbb{R}$

dx - odległość między dwoma sąsiednimi punktami podziałowymi, $dx \in \mathbb{R}$

x - pozycja punktu podziałowego, $x \in \mathbb{R}$

i - licznik punktów podziałowych, $i \in \mathbb{N}$



Metoda Simpsona - Lista kroków

Lista kroków

K01: $s \leftarrow 0; s_t \leftarrow 0$

K02: $dx \leftarrow \frac{x_k - x_p}{n}$

K03: **Dla** $i = 1, 2, \dots, n$, **wykonuj** K04...K06

K04: $x \leftarrow x_p + i \times dx$

K05: $s_t \leftarrow s_t + f(x - \frac{dx}{2})$

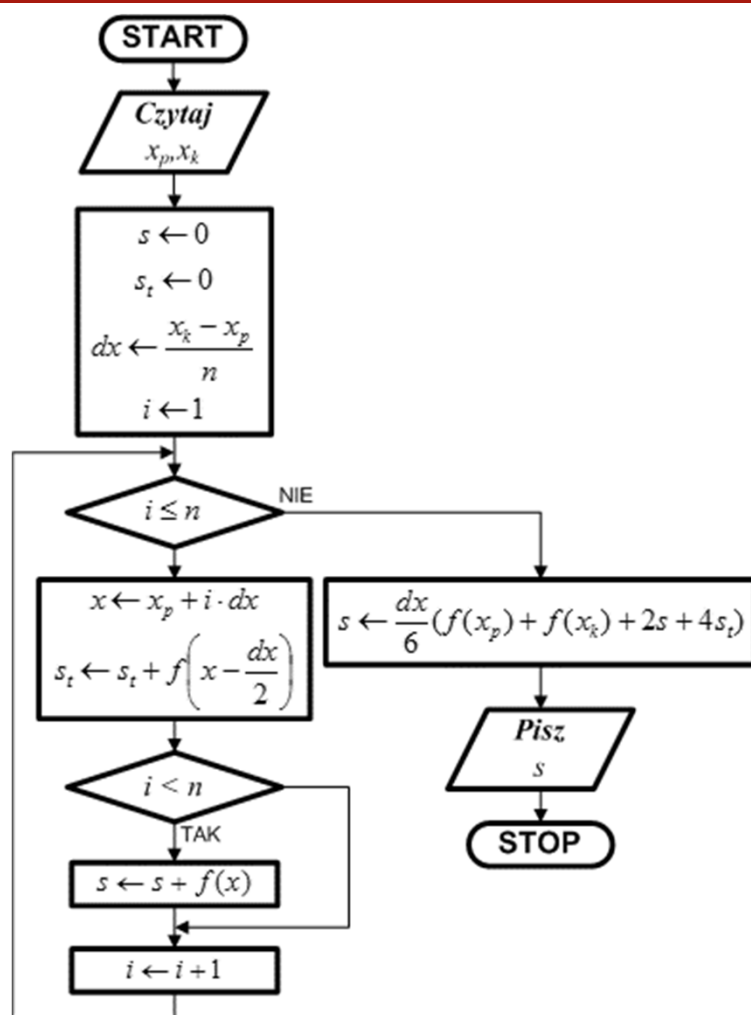
K06: **Jeśli** $i < n$, **to** $s \leftarrow s + f(x)$

K07: $s \leftarrow \frac{dx}{6} (f(x_p) + f(x_k) + 2s + 4s_t)$

K08: **Zakończ**



Metoda Simpsona - Schemat blokowy



Charakterystyki częstotliwościowe układów

Dana jest funkcja układu BIBO stabilnego:

$$H(s) = \frac{a_1 s^n + a_2 s^{n-1} + \dots + a_n s + a_{n+1}}{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \dots + b_m s + b_{m+1}} = \frac{L(s)}{M(s)}, \quad n \leq m,$$

Charakterystyka widmowa dana jest zależnością:

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

Amplitudowa charakterystyka widmowa:

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = A(-\omega)$$

w dB:

$$A_{dB}(\omega) = 20 \lg A(\omega)$$

Fazowa charakterystyka widmowa:

$$\phi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\phi(-\omega)$$

Odpowiedź impulsowa układu dana jest zależnością:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

Wykreślanie charakterystyk w Matlabie

Dana jest funkcja układu:

$$H(s) = \frac{50s^2}{s^4 + 10s^3 + 250s^2 + 1000s + 10000}$$

Wykreślić charakterystyki amplitudową i fazową tego układu w przedziale 0.1 - 10 Hz

Charakterystyki wykreślić zarówno w liniowej jak i logarytmicznej skali częstotliwości.

Amplitudę liniowo i w dB, fazę w stopniach.

f=.....; w=2*pi*f; s=j*w;

1.

H1=50*s.^2./(s.^4+10*s.^3+250*s.^2+1000*s+10000);

2.

H2=polyval([50 0 0],s)./polyval([1 10 250 1000 10000],s);

lub: H2=polyval(L,s)./polyval(M,s);

ale wtedy należy zadeklarować L i M:

L=[50 0 0]; M=[1 10 250 1000 10000]

3.

H3=freqs([50 0 0], [1 10 250 1000 10000],w);

lub: H3=freqs(L, M,w);

ale wtedy należy zadeklarować L i M:

L=[50 0 0]; M=[1 10 250 1000 10000]

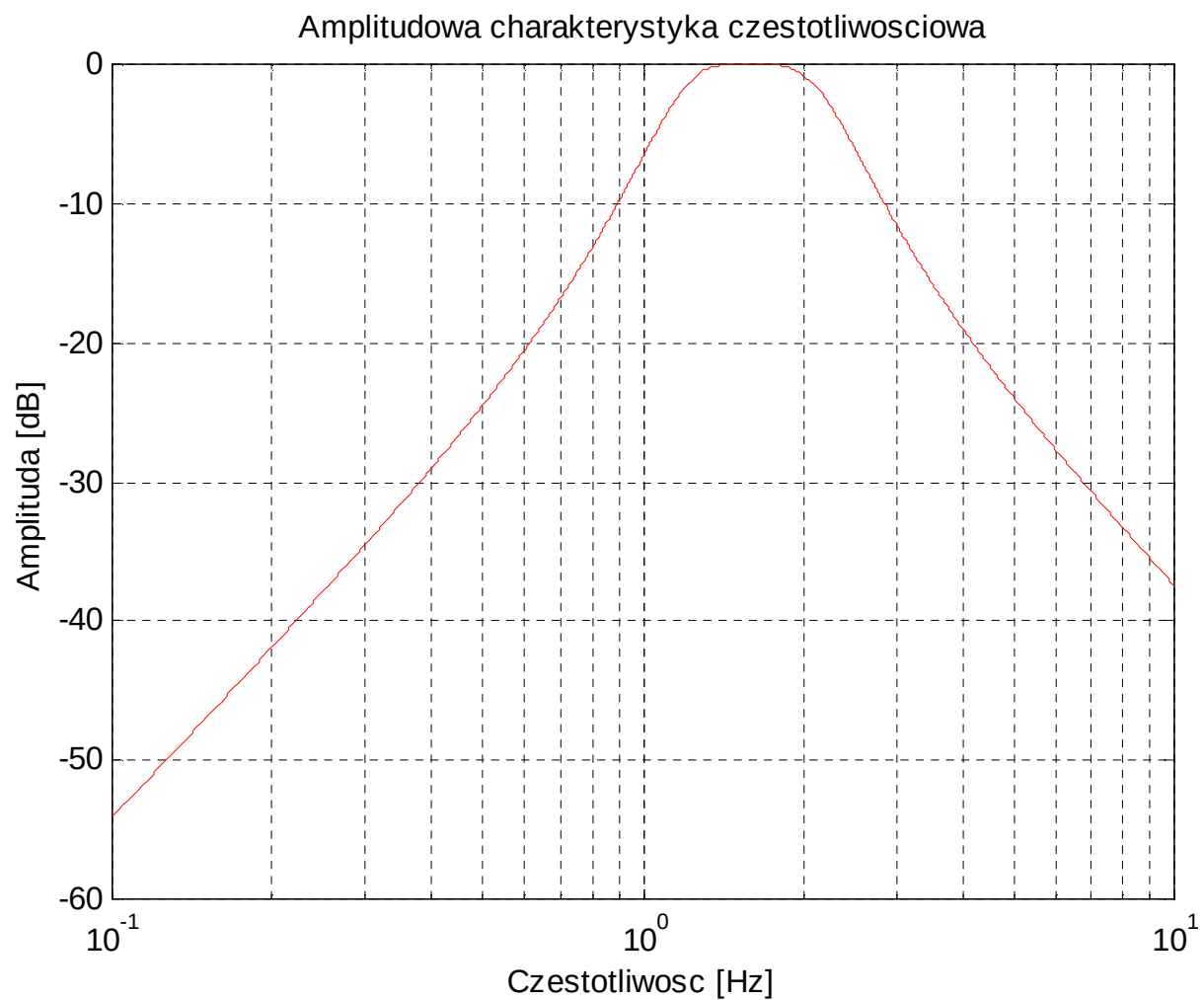
$\text{freqs}(L,M)$ - tworzy wykresy charakterystyk amplitudowej i fazowej, oś x - pulsacja w radianach, 200 punktów!

$\text{freqs}(L,M,w)$ - j.w., ale w jest zadany wektorem pulsacji,

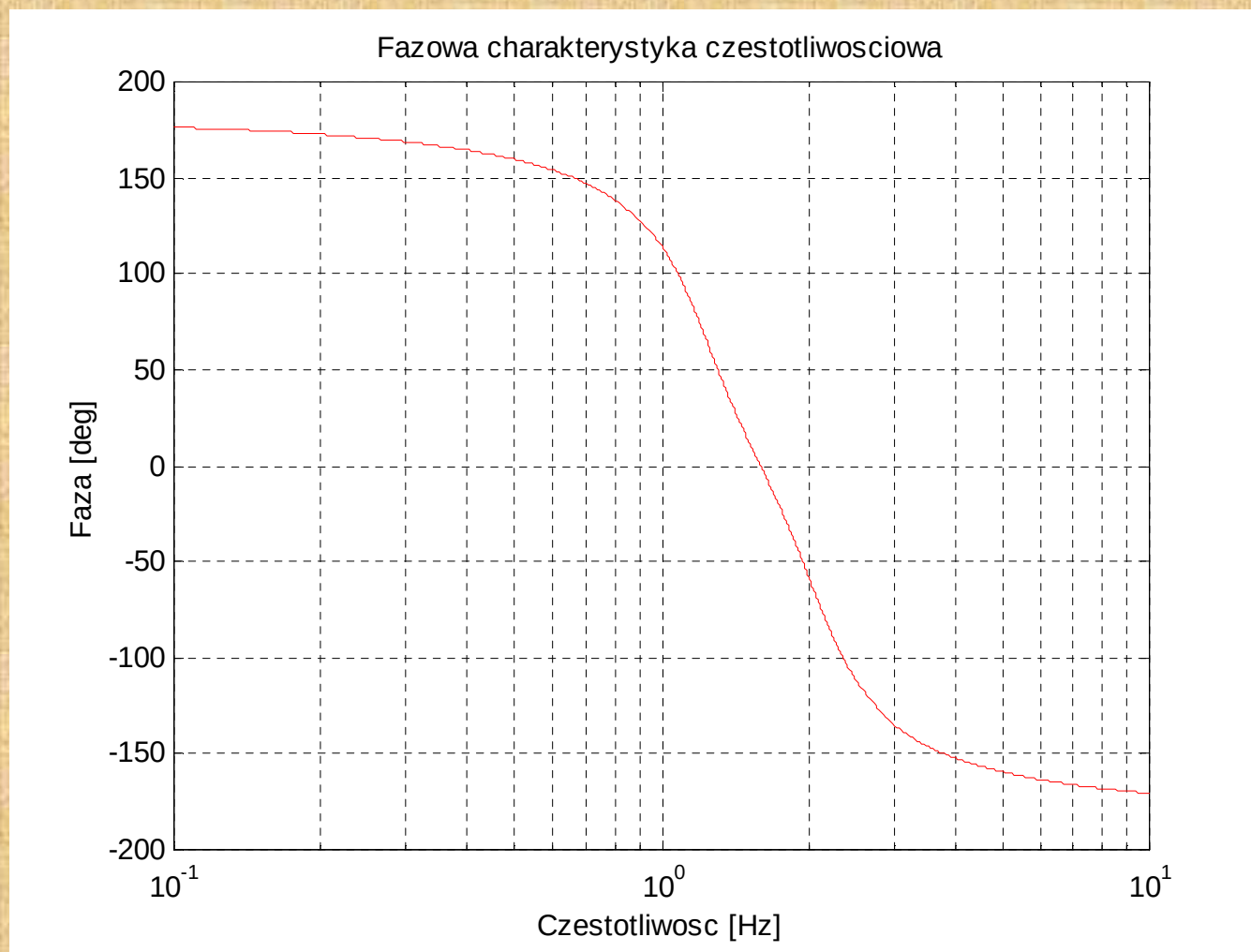
$H=\text{freqs}(L,M,w)$ - nie tworzy wykresu lecz wektor odpowiedzi częstotliwościowych, który można potem wykreślić

$[H,w]=\text{freqs}(L,M)$ - nie tworzy wykresu lecz wektor odpowiedzi częstotliwościowych i wektor pulsacji

Charakterystyka amplitudowa



Charakterystyka fazowa



Odpowiedź impulsowa

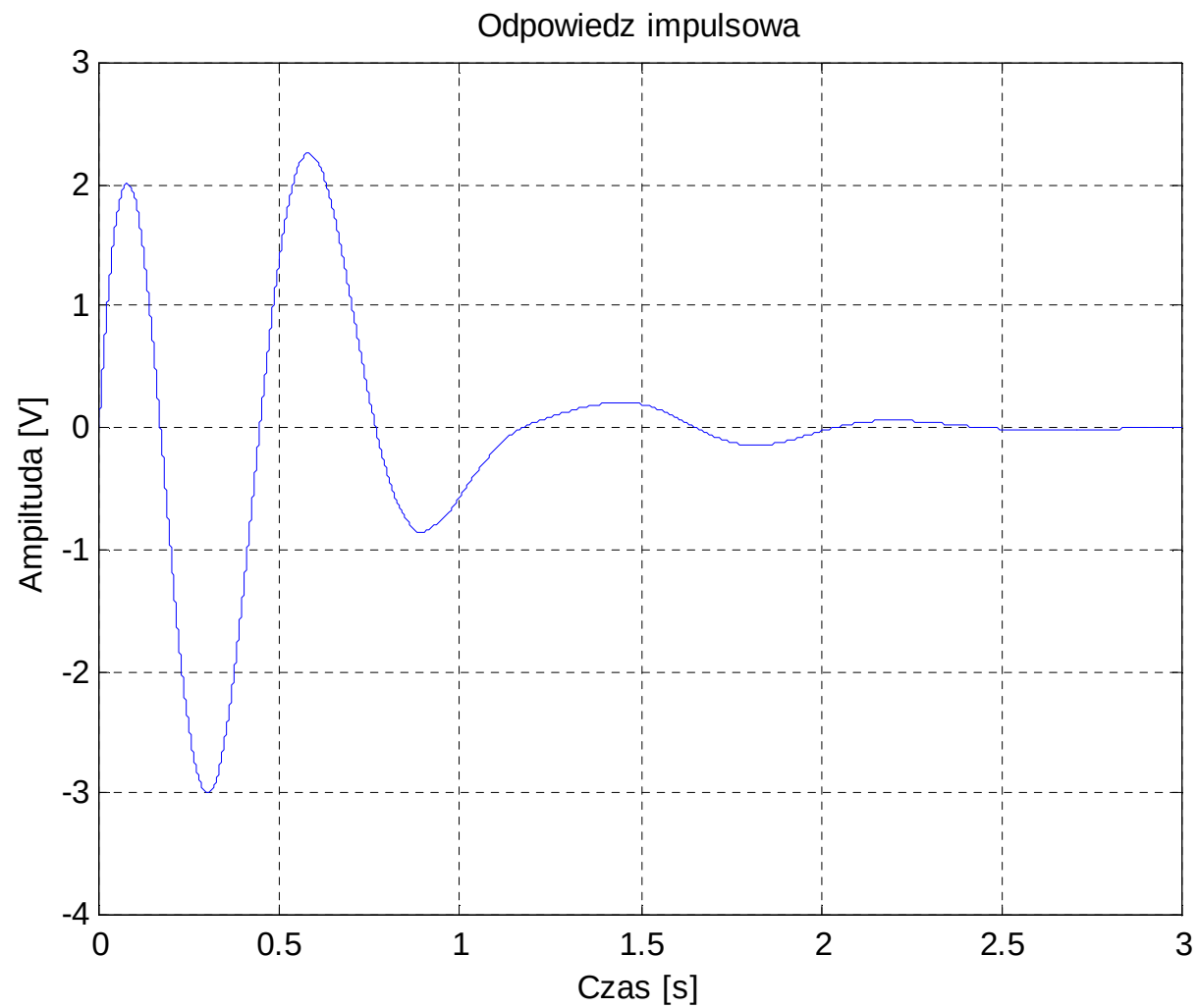
`impulse(L,M)` - wykres, czas odpowiedzi
dobrany przez Matlaba

`impulse(L,M,T)` - T oznacza końcowy czas
odpowiedzi impulsowej

`impulse(L,M,t)` - t - zadany wektor czasu

`h = impulse(L,M)` - nie wykonuje wykresu
lecz tworzy wektor odpowiedzi impulsowej
h, który można potem wykreślić

Odpowiedź impulsowa



Odpowiedź jednostkowa

$\text{step}(L,M)$ - wykres, czas odpowiedzi
dobrany przez Matlab

$\text{step}(L,M,T)$ - T oznacza końcowy czas
odpowiedzi impulsowej

$\text{step}(L,M,t)$ - t - zadany wektor czasu

$k = \text{step}(L,M)$ - nie wykonuje wykresu lecz
tworzy wektor odpowiedzi impulsowej h ,
który można potem wykreślić

Odpowiedź jednostkowa

